第7章 基本振动系统动态特性及系统参数的测量

- 基本振动系统
  - 自由衰减振动系统
  - 受迫稳态振动系统
- 系统参数测量
  - 固有频率
  - 阻尼系数
  - 质量
  - 刚度
- 简弦振动的测量
  - 频率
  - 振幅
  - 相位

基本振动系统：单自由度

质量、弹簧、阻尼

复杂振动系统：多自由度

连续介质结构等

简谐振动：单频

周期性振动：多频

随机振动：复杂

非线性振动：

EMEC @ Shanghai Jiaotong University

Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

第7章 基本振动系统动态特性及系统参数的测量

- 7.1自由衰减振动测试系统的振动特性

固有频率和阻尼比是振动系统的十分重要的动特性参数。人们研究具体振动问题时，常常首先需要确定系统的固有频率和阻尼比。

基本振动系统，即大家熟悉的单自由度系统，若存在弱粘性阻尼，则其自由微振动微分方程一般为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$x=Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\phi)$$

$$\zeta=c/c_c \qquad c_c=2m\omega_n$$

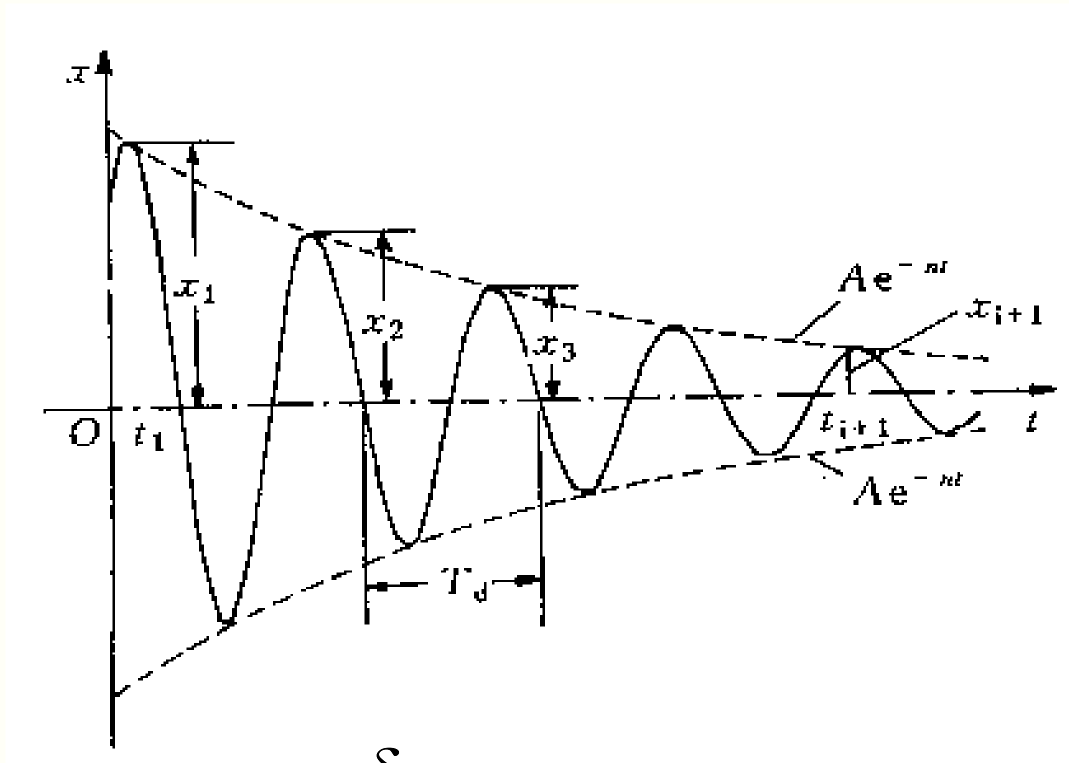
$$\omega_n=\sqrt{k/m},\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}, \quad \phi=\tan^{-1}\frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}$$

Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

$$T_d = 1/f_d = 2\pi/\omega_d$$

$$x_n / x_{n+1} = e^{\zeta\omega_n T_d} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



$$\delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}}$$

$$\delta = \frac{1}{n-1}\ln\frac{x_1}{x_n}$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

7.2 由受迫稳态振动测试系统的振动特性

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\sin\omega t$$

$$x=X\sin(\omega t-\phi)$$

$$X=\frac{F/k}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n})^2}},\phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

$$dX/d\omega = 0$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

x的幅值取得极大值。

$$\omega = \omega_n$$

$\dot{x}$ 的幅值取得极大值。

$$\omega = \omega_n/\sqrt{1-2\zeta^2}$$

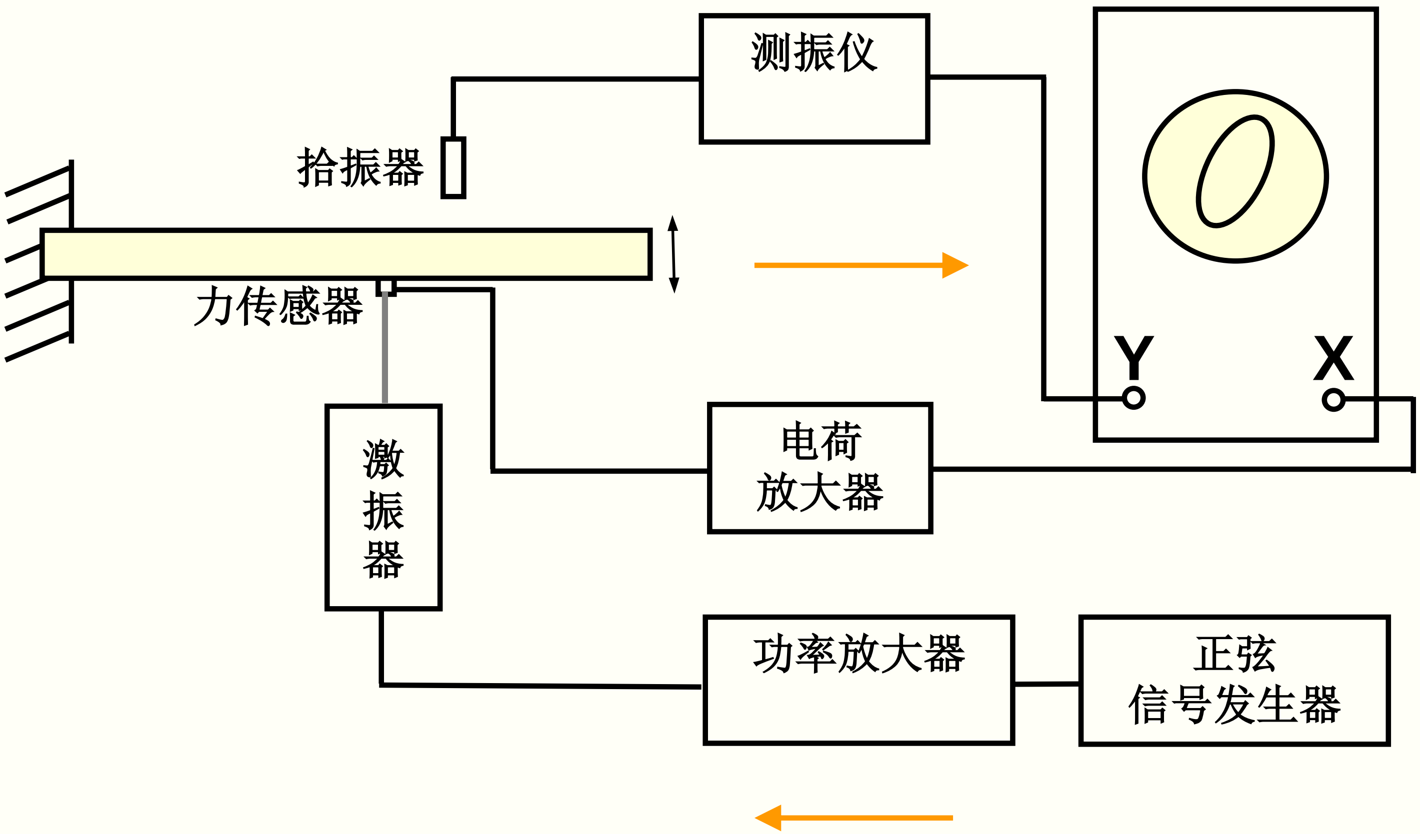
$\ddot{x}$ 的幅值也取得极大值。

当激励频率达到某一特定值，若振动稳态响应的幅值获得极大值，常被称为**共振**。一般在有阻尼情况下，系统稳态响应的位移、速度和加速度的共振频率各不相同。

注意，只有振动速度的共振频率与无阻尼固有频率相等。

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

7.2.1使用速度共振测系统固有频率



EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

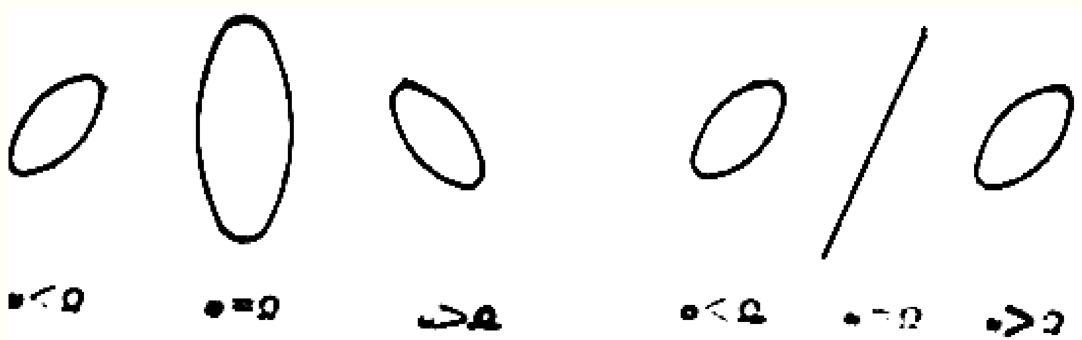
横轴 $F\sin\omega t$ 纵轴 $\dot{x}=\omega X\sin(\omega t-\phi+\dfrac{\pi}{2})$

$$\tan\phi=\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

速度共振时： $\omega=\omega_n$ $\phi=\pi/2$

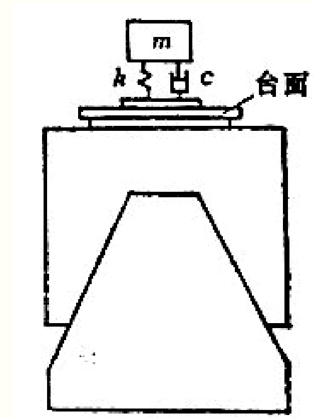
则，与激振力相位差：

$$\omega t-\varphi+\pi/2-\omega t=\omega t-\pi/2+\pi/2-\omega t=0$$



用位移响应判定速度共振 用速度响应判定速度共振

7.2 .2使用振动台激振测固有频率



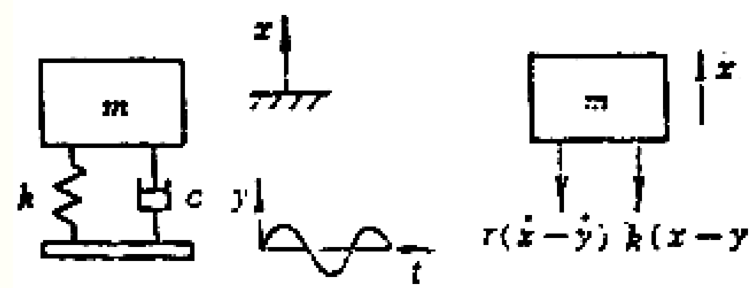
1.结构与振动台总质量相比很小时

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}$$

$$y=Ye^{j\omega t}$$

$$x=Xe^{j(\omega t-\phi)}$$

$$\omega_n=\sqrt{k/m}$$



a)　　　b)

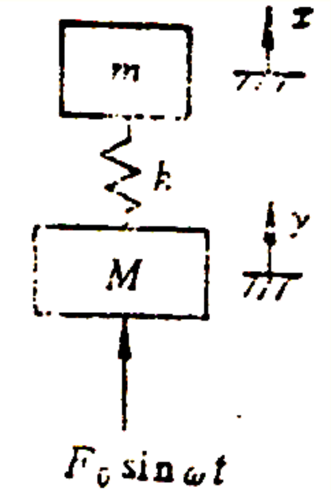
$$\left|\frac{X}{Y}\right|=\sqrt{\frac{1+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}},\quad \tan\phi=\frac{(2\zeta\omega/\omega_n)^2}{1-(\omega/\omega_n)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}$$

振动传递率

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

2.结构与振动台总质量相差不大时

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -(x-y)k \\ M\ddot{y} = (x-y)k + F\sin\omega t \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \sin\omega t$$

将 $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \sin\omega t$ 代入方程中

$$X = \frac{-F}{\omega^2(m+M)(1-\omega^2/\omega_2^2)}, \quad Y = \frac{(1-\omega^2/\omega_1^2)F}{\omega^2(m+M)(1-\omega^2/\omega_2^2)}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}$$

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

$$\omega = \omega_1 \quad \Rightarrow \quad Y = 0 \quad \text{反共振}$$

$$X = \frac{-F}{\omega^2 (m+M)(1-\omega^2/\omega_2^2)}, \quad Y = \frac{\overset{=0}{\cancel{(1-\omega^2/\omega_1^2)}}F}{\omega^2 (m+M)(1-\omega^2/\omega_2^2)}$$

这样，为了测出被测系统的固有频率，须测量被测系统和振动台面组成的联合系统的反共振频率。

需用两个传感器来测量：一个用来测量台面运动，另一个用来测量被测系统的振动。

当台面位移信号为0时，尽管被测系统的响应信号不是极大值，然而此时的频率便是被测系统的固有频率。

EMEC @ Shanghai Jiaotong University

Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

7.2 .3 使用半功率点法测阻尼比

$$X=\frac{F/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}},\phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\beta=\frac{X}{F/k}=\frac{1}{\sqrt{[1-r^2]^2+(2\zeta r)^2}},\quad r=\omega/\omega_n$$

稳态受迫振动位移的放大因子

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

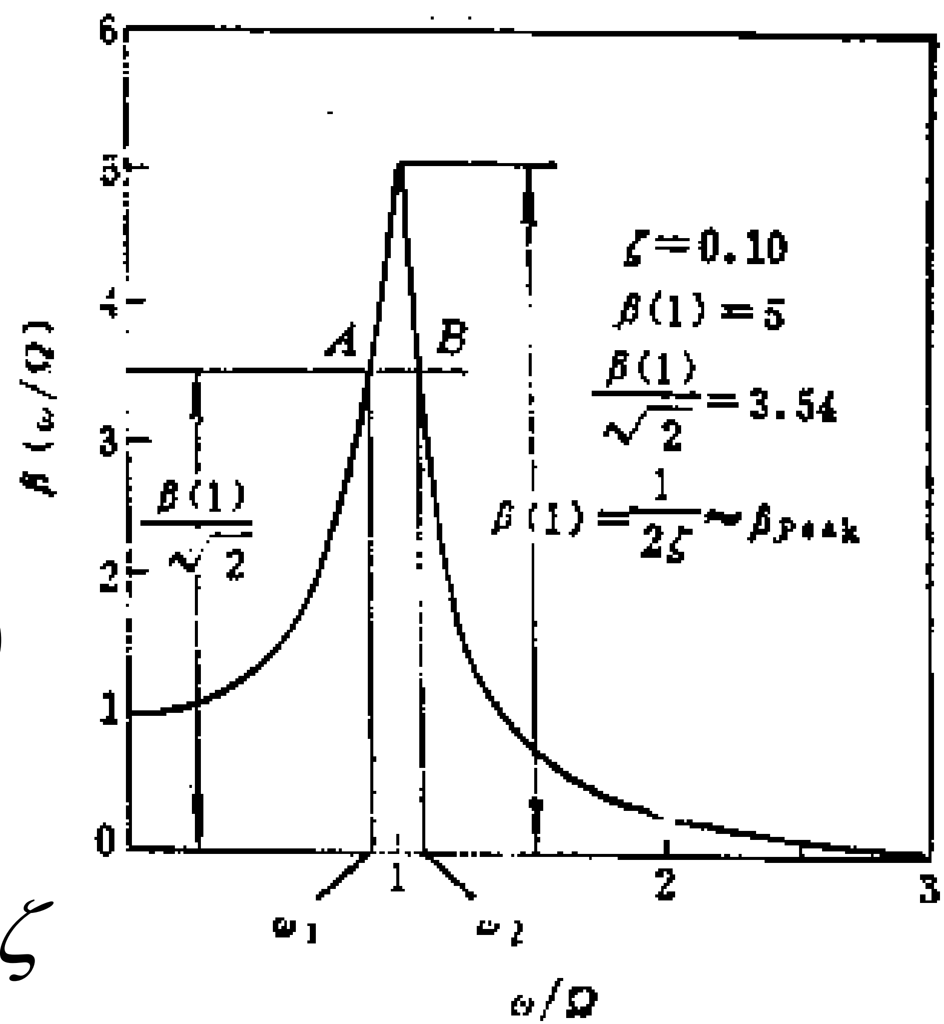
$$r=\omega/\omega_n=1$$

$$\beta=1/2\zeta$$

$$r=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\beta_{\max}=1/(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2})$$

$$\zeta\le 0.1 \quad \beta_{\max}\cong 1/2\zeta$$



EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

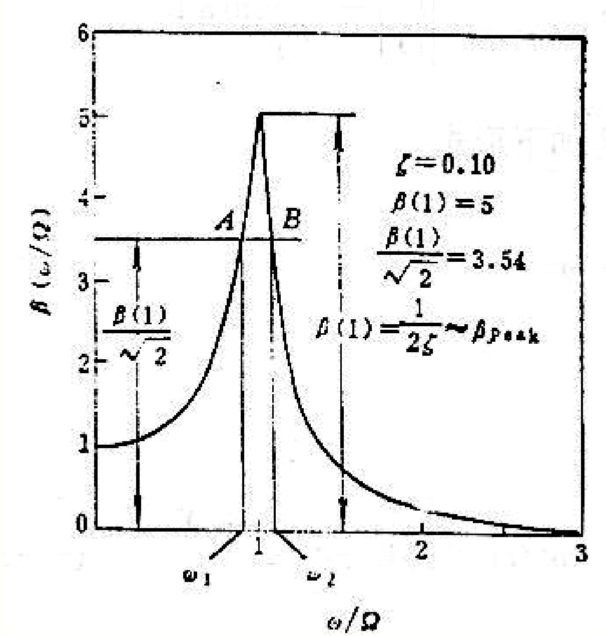
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}\cong\frac{1}{2\zeta\sqrt{2}}$$ 半功率点

与曲线交于A, B两点 $\Rightarrow$ $r_{1,2}\cong 1\pm\zeta$

$$r_2-r_1=\omega_2/\omega_n-\omega_1/\omega_n=\Delta\omega/\omega_n=2\zeta$$

$$\zeta\cong\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)/\omega_n$$

$$\zeta\cong\frac{1}{2}(\Delta\omega)/\omega_n$$



EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

7.3 质量与刚度的测量

附加质量法：**附加质量的前提是什么？**

方法：

1）用正弦激振法或自由振动法求得系统的固有频率 ω_n

2）在原系统上附加微小质量，再次测出此时系统的固有频率 $\omega_n + \Delta\omega$

3）计算质量和刚度

$$m = -\frac{\omega_n}{2}\frac{\Delta m}{\Delta\omega} \qquad m = -\frac{\omega_{n1}^2 \Delta m}{\omega_n^2 - \omega_{n1}^2}$$

附加质量较小时， $\Delta m / m$ **<0.05** **附加质量较大时**

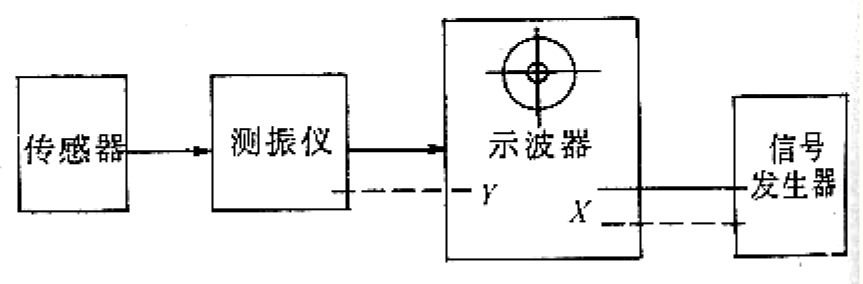
刚度如何测量？

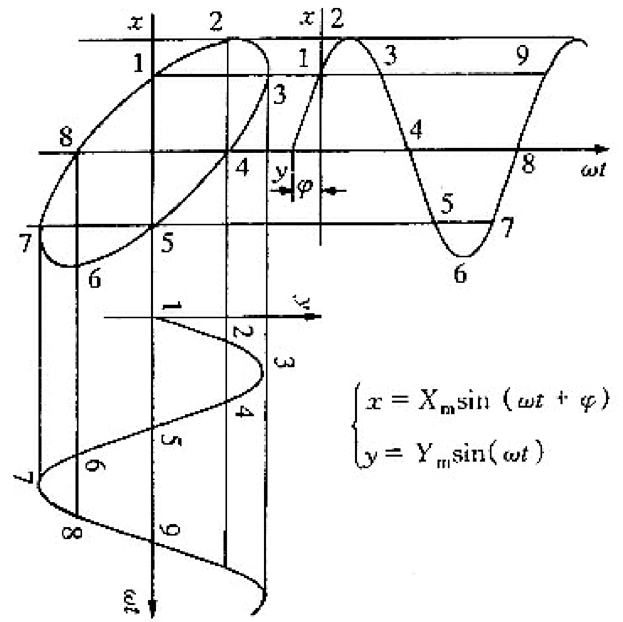
EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

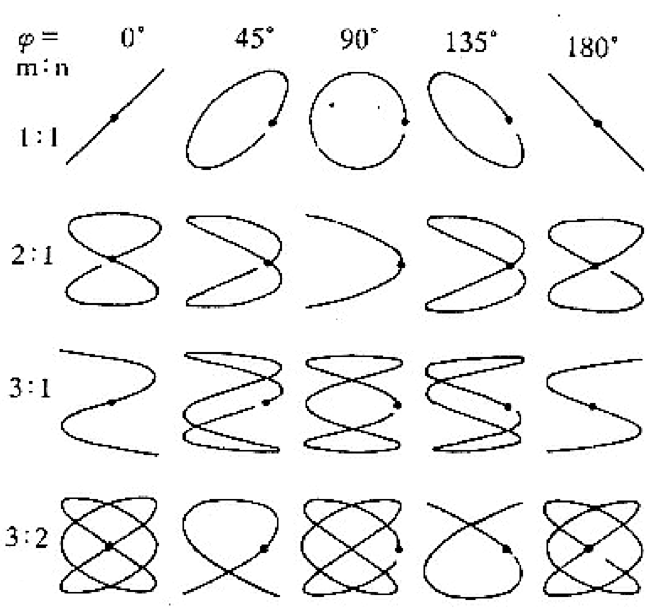
7.4 系统参数测量

1 简谐振动频率的测量

李萨如图形比较法





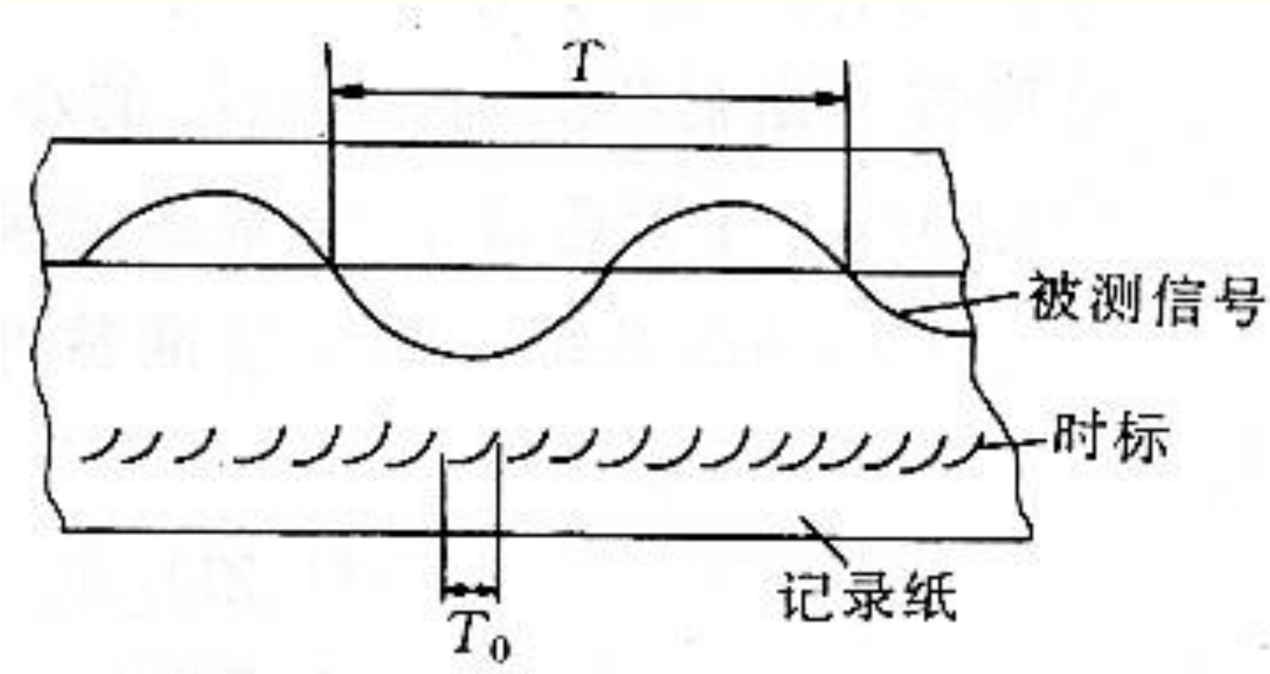


EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

7.4 系统参数测量

1 简谐振动频率的测量

录波比较法



7.4 系统参数测量

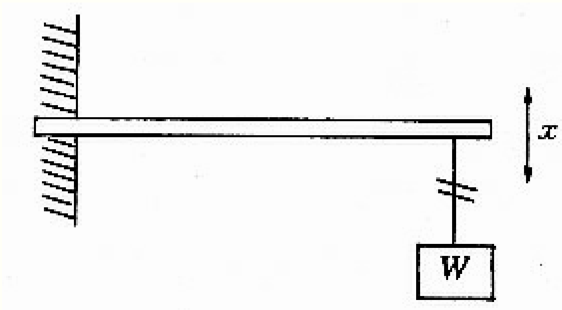
1 简谐振动频率的测量

直接测频法

EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

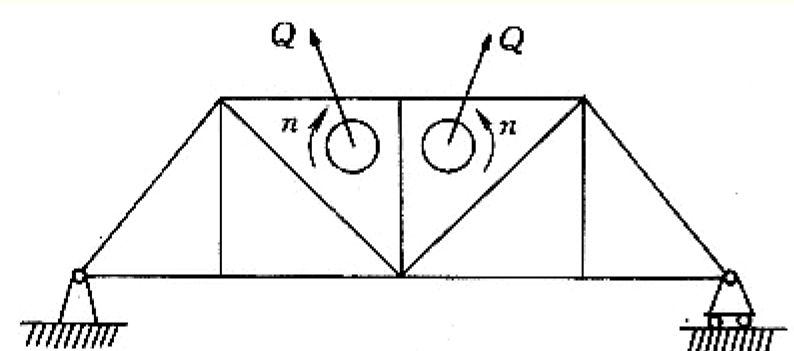
7.4 系统参数测量

2 机械系统固有频率测量

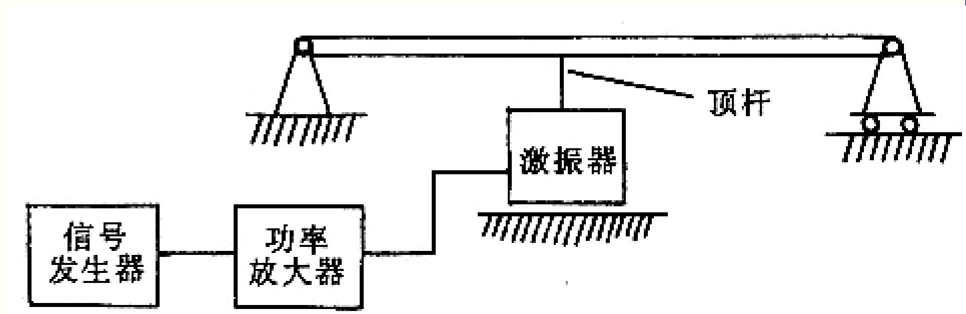


自由振动法

敲击法



调节转速



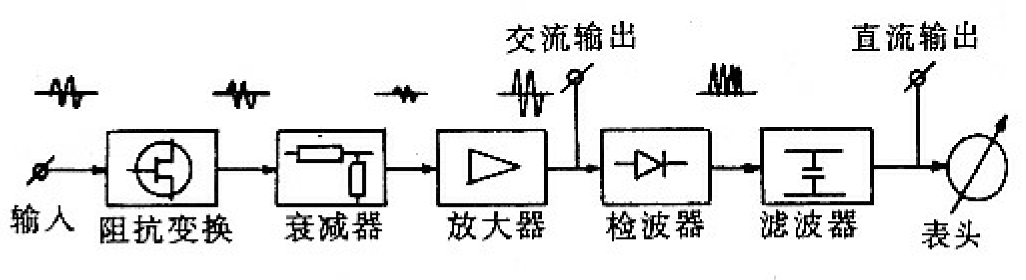
调节干扰力

强迫振动法

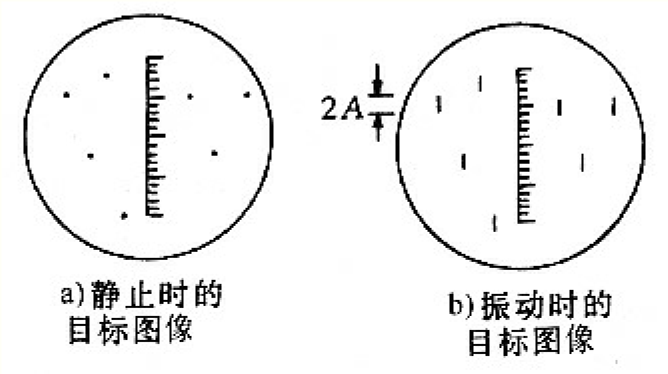
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

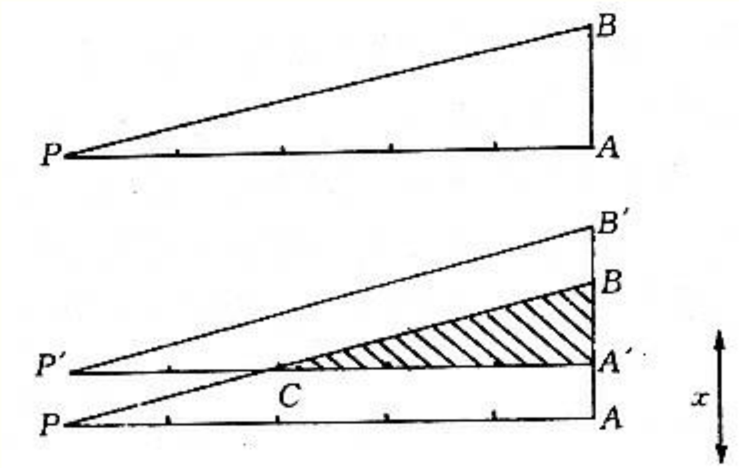
7.4 系统参数测量

3 简谐振动振幅测量



电压表直读法

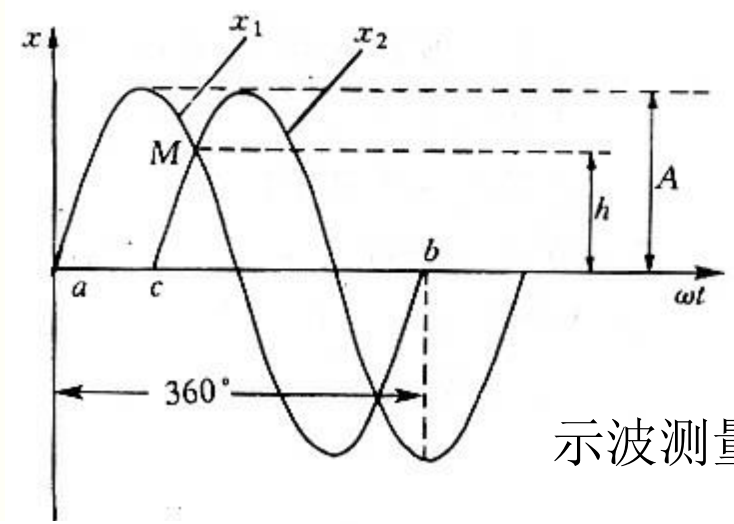




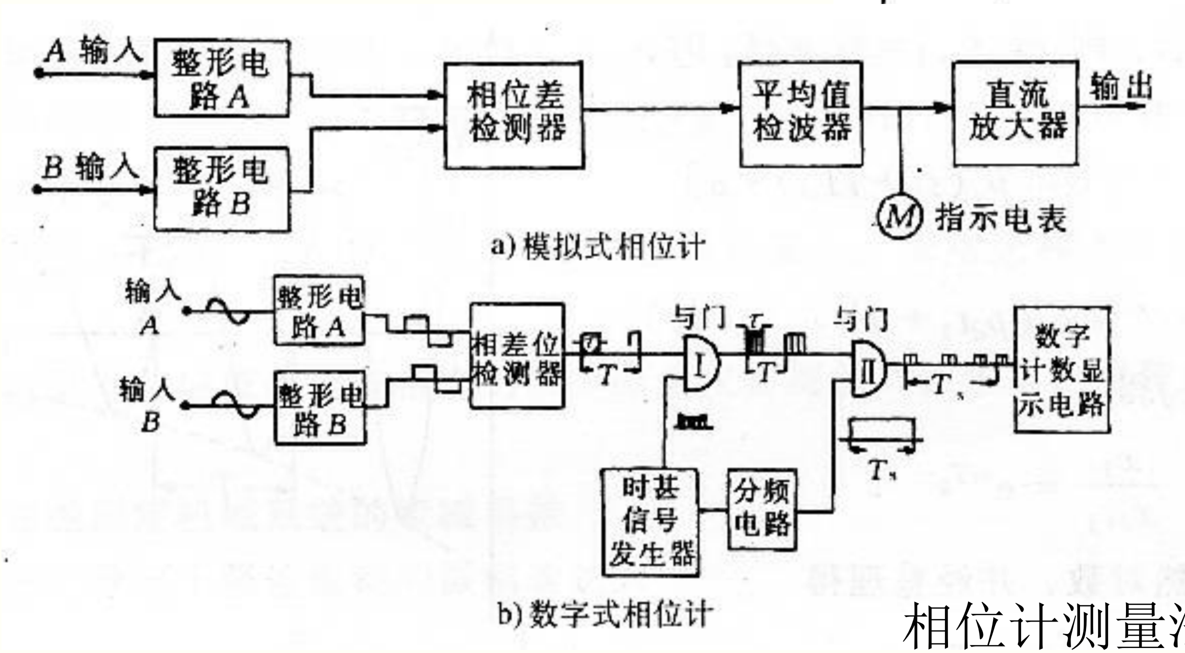
光学法

Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

4 同频简谐振动相位差测量



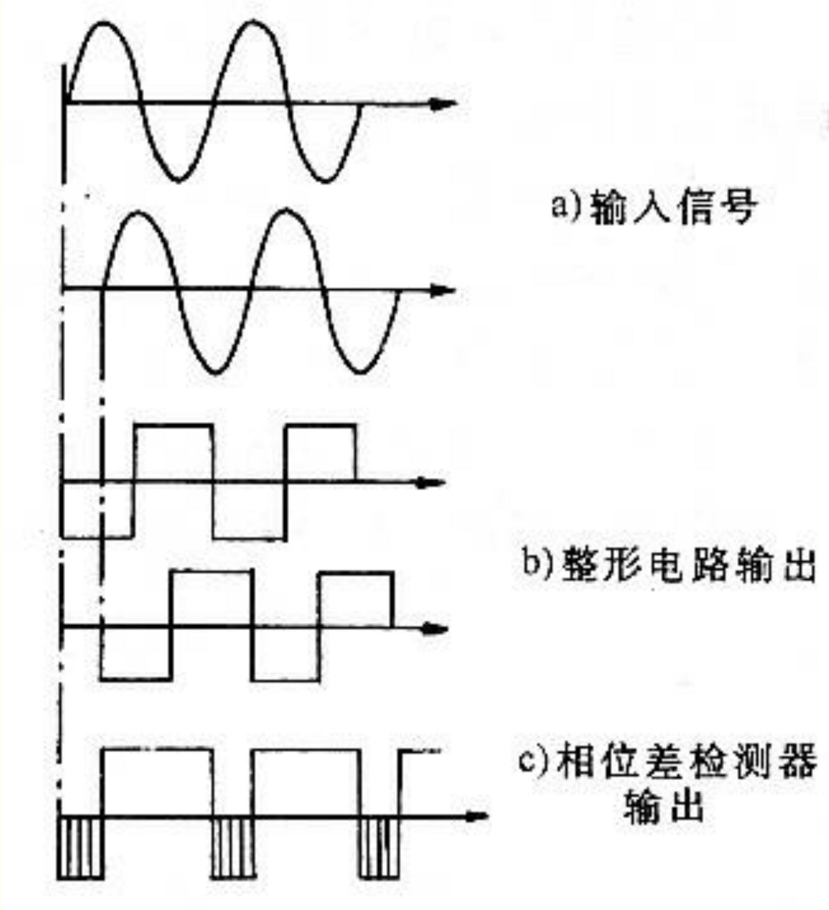
示波测量法



相位计测量法

Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

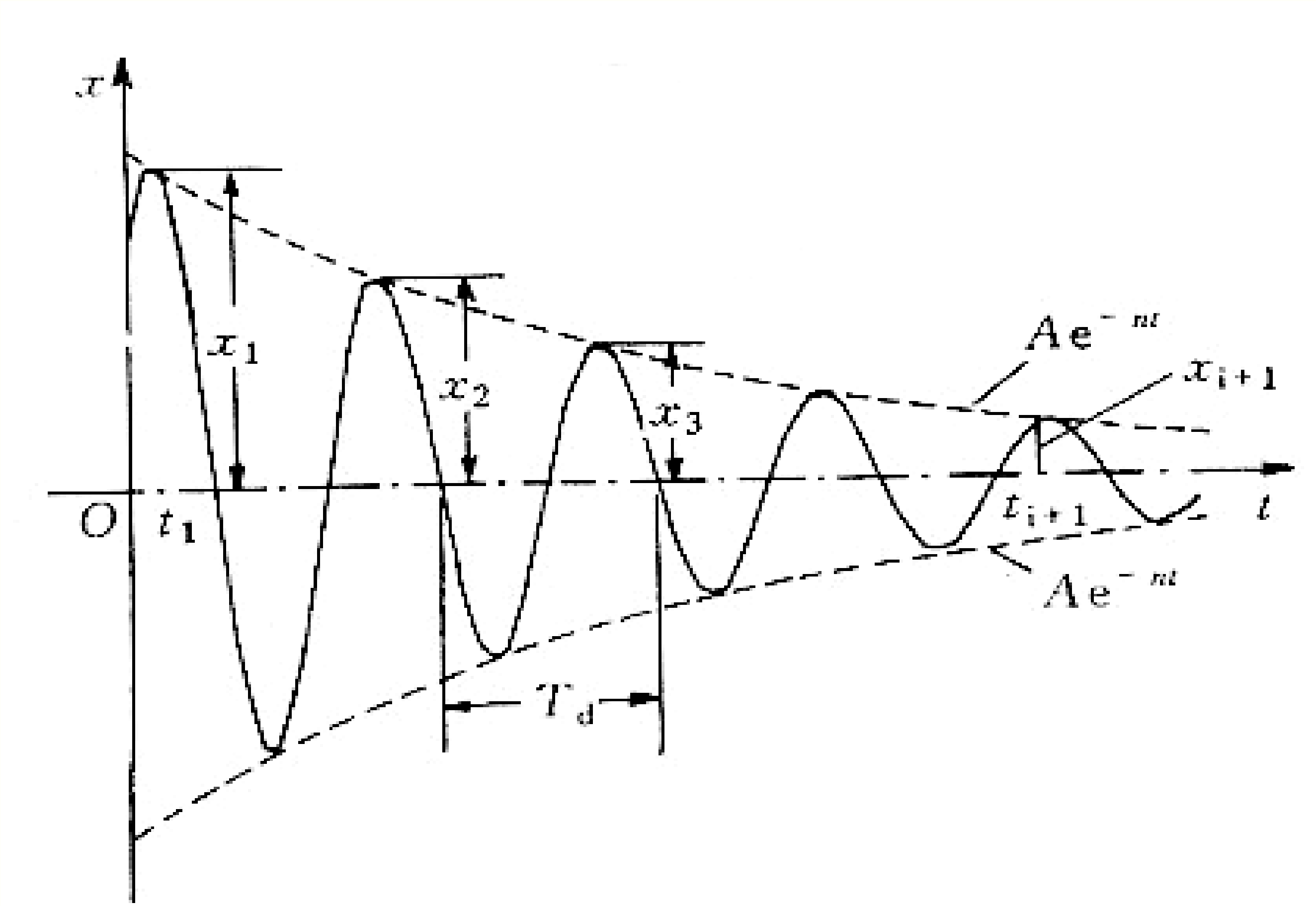
4 同频简谐振动相位差测量



相位计测量原理

5 阻尼的测量

1、自由振动衰减波形



EMEC @ Shanghai Jiaotong University
Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053

5 阻尼的测量

2、共振频率法

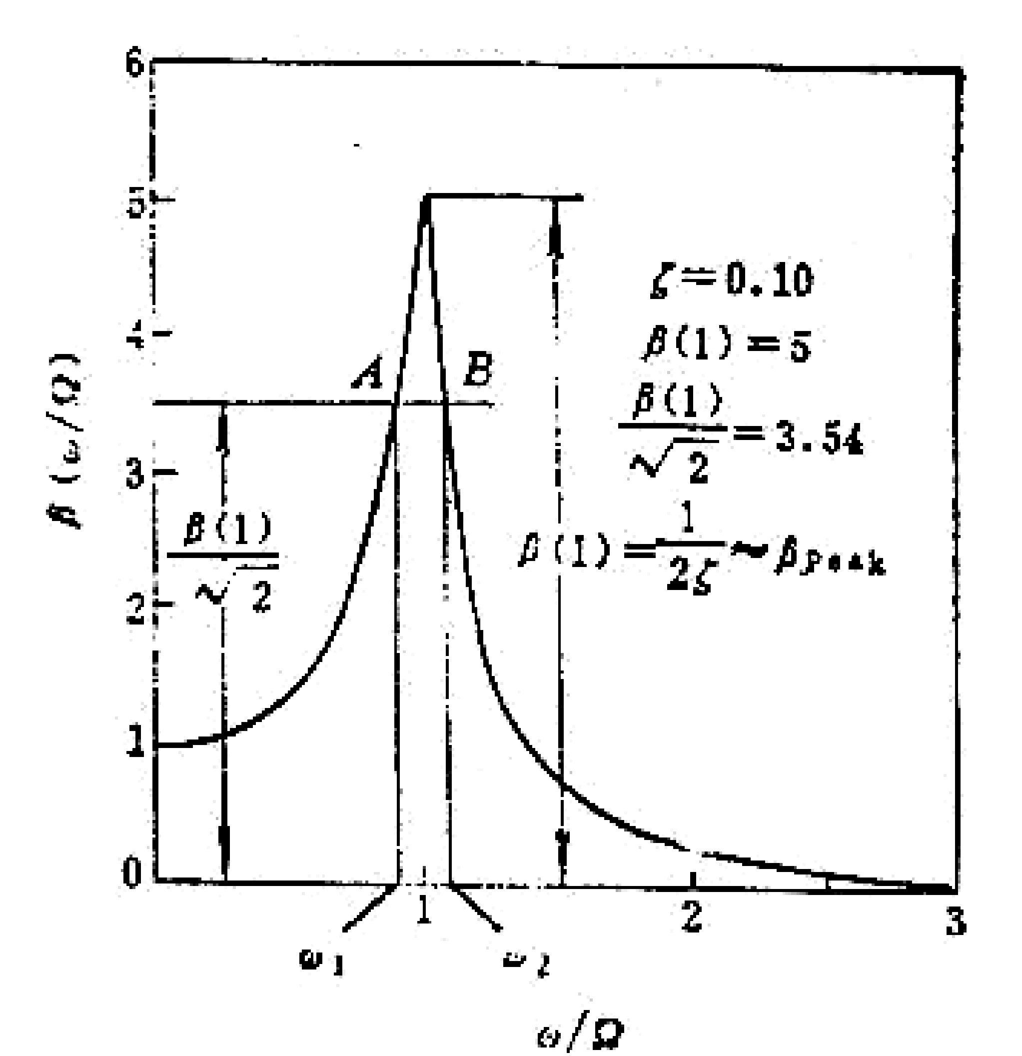
位移共振 $$\omega_x = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

速度共振 $$\omega_{\dot{x}} = \omega_n$$

加速度共振 $$\omega_{\ddot{x}} = \omega_n \Big/ \sqrt{1-2\zeta^2}$$

5 阻尼的测量

3、半功率法



Email: yuzy@sjtu.edu.cn Tel: 54743090 54743053