

第五章 结构数值分析方法



- 5.1 基本概念
- 5.2 杆系结构的矩阵位移法
- 5.3 结构有限元法

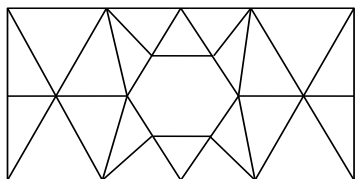


5.1 基本概念

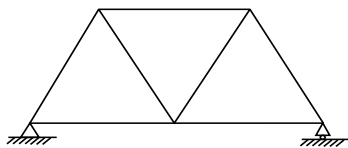


- **矩阵位移法：**按位移法的基本原理运用矩阵计算内力和位移的方法
- 计算方法有规律，方程式有规律，未知数少，计算方便，便于设计→位移法
- 矩阵表达简单明了，运算有规律→矩阵运算
- 结构矩阵分析方法首先把结构离散成有限数目的单元，然后再合成为原结构，因而也属于**有限元法**。基本思路：
 - ✓ 先将结构离散，经单元分析形成单刚矩阵；然后根据变形和平衡条件，将单元集合成整体，即由单刚矩阵集成整体刚度矩阵，建立结构位移法基本方程，进而求出结构的位移和内力。
 - ✓ “一拆一搭”将复杂结构的计算问题转化为有限个杆元的分析与集成问题

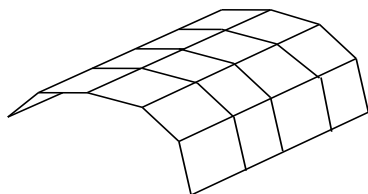
- **基本环节:**离散化, 单元分析, 整体分析
- **有限元法:**连续体离散为有限个单元体(与矩阵法异同)



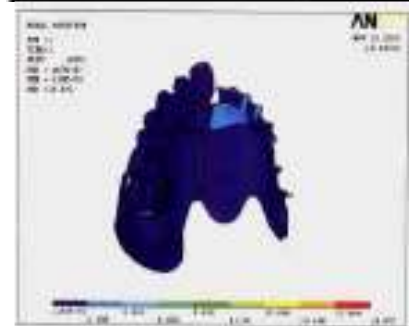
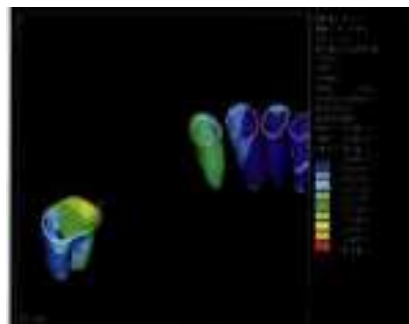
(a)



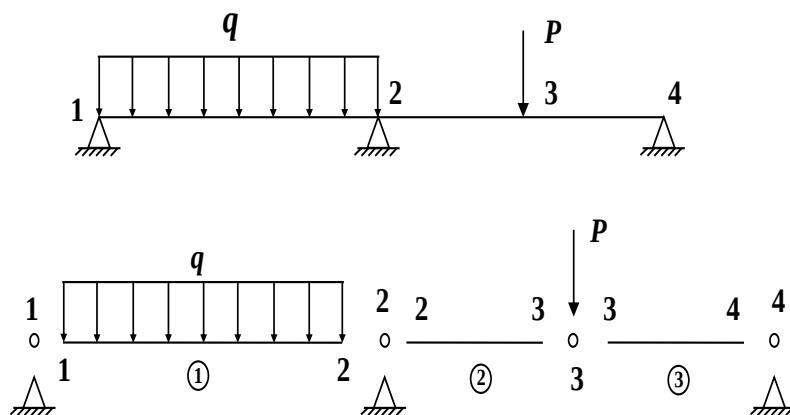
(c)



(b)



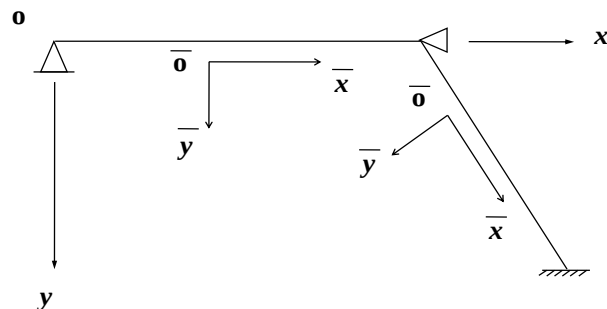
术语



- 离散（“拆”，杆件两端的约束，集中力，变断面）
- 杆元/单元，节点（杆元/单元，节点，支座，编号）

术语

- 坐标系（局部，整体）
- 自由度（i-j杆杆端位移矩阵）
- 杆元端点力（i-j杆杆元端点力，与杆端位移矩阵对应）
- 杆元/单元刚度矩阵（联系杆元端点力和节点位移 $[K_e]$ ）
- 分布外力处理，结构刚度矩阵，约束处理，坐标转换



$\bar{oxy}$ — 局部坐标, oxy — 总坐标

矩阵位移法计算内容



- 杆系离散为杆元和节点（离散）
- 建立杆元刚度矩阵（单元分析）
- 对各节点建立平衡方程式（整体分析）
- 求解方程式得位移
- 求杆元内力和变形

5.2 杆系结构的矩阵位移法



5.2.1 杆系结构单元类型及单元刚度矩阵

5.2.2 结构的刚度矩阵

5.2.3 约束处理及例题

5.2.4 坐标变换

5.2.5 空间杆系结构分析*

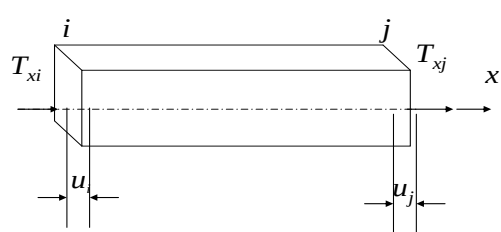


5.2.1 杆元的基本类型及单元的刚度矩阵

- 空间杆元节点6个自由度
- 5-1及5-2-1单元分析皆针对局部坐标系 $\overline{Oxyz}$ ，简化 $Oxyz$
- 均用矢量表示（力矩双箭头矢量）

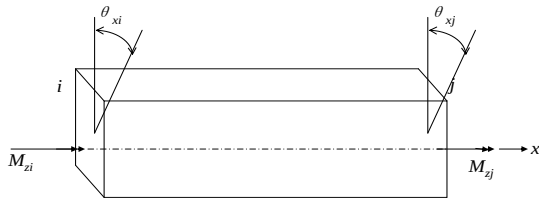


- 基本四种：
 - 拉压杆
 - 扭转杆
 - XOY平面弯曲杆元
 - XOZ平面弯曲杆元
- 组合情况：
 - 平面刚架，平面板架，拉压扭转，平面桁架
- 各种类型杆元节点力，节点位移，单元刚度矩阵

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
1	拉 (压) 杆		$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{xj} \end{Bmatrix}$	可作为平 面桁架杆 元

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
2	扭转杆元		$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{Bmatrix}$	

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{GJ_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{GJ_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
3	xoy平面的弯曲杆元		$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} N_{yi} \\ M_{zi} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}$	可作为xoy平面内弯曲的连续梁杆元

$$\begin{bmatrix} N_{yi} \\ M_{zi} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ & & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

对称

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
4	xOz平面的弯曲杆元		$\begin{Bmatrix} \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{yj} \\ N_{zj} \end{Bmatrix}$	可作为xOz平面内弯曲的连续梁杆元

$$\begin{bmatrix} M_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{yj} \\ N_{zj} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} \\ \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ & & 4 & \frac{6}{l} \\ \text{对称} & & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{yi} \\ w_{zi} \\ \theta_{yj} \\ w_{zj} \end{bmatrix}$$

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
5	平面刚架杆元		$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{xi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ M_{zi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}$	1+3

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ M_{zi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} & 0 & -\frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ 0 & \frac{6I_z}{l} & 4I_z & 0 & -\frac{6I_z}{l} & 2I_z \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_z}{l^2} & -\frac{6I_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

No	名称	图形	节点位移 $\{\delta_{ij}\}$	端点力 $\{F_{ij}\}$	说明
6	平板架杆元		$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ N_{zj} \end{Bmatrix}$	2+4

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ N_{zj} \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 & -\frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ & 4I_y & -\frac{6I_y}{l} & 0 & 2I_y & \frac{6I_y}{l} \\ & & \frac{12I_y}{l^2} & 0 & -\frac{6I_y}{l} & -\frac{12I_y}{l^2} \\ & & & \frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & 4I_y & \frac{6I_y}{l} \\ & & & & & \frac{12I_y}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix}$$

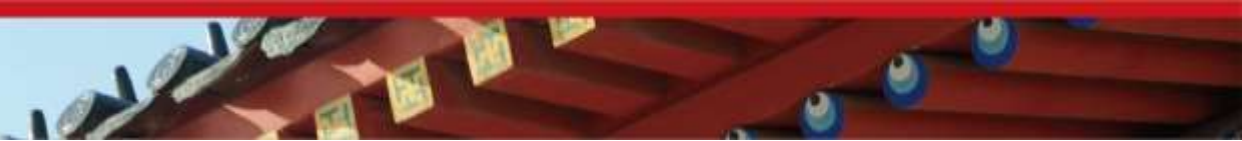
其他



- 拉压扭转
- 平面桁架

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

- 最一般情况



刚度矩阵性质



- 对称
- 对角线为正
- 奇异阵（数学：其行列式=0，不能求逆；物理：单元刚体位移）

分块子矩阵



- 物理意义
- 子矩阵阶数
- 对称性
- 利于组成总刚

虚功原理运用



- 杆元刚度矩阵推求：虚功等于虚应变能
- 几何矩阵，应变矩阵[B]
- 弹性矩阵[D]
- 应力矩阵[S]
- 单元刚度矩阵[k^e]

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

小结



- 矩阵位移法：按位移法的基本原理运用矩阵计算内力和位移的方法
思路：化整为零（离散，单元分析）；合零为整（整体分析）
术语：离散，杆元/单元，节点，坐标系统，自由度，杆元端点力，杆元/单元刚度矩阵
- 杆元类型和单刚矩阵：（基本四种拉压，扭转，xoy平面弯曲，xoz平面弯曲；组合情况平面刚架，平面板架，拉压扭转，平面桁架）
- 单刚性质
- 分块子矩阵
- 虚功原理应用

拉压杆元

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$



- 几何矩阵，应变矩阵[B]

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{l} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad [\varepsilon] = [B] [\delta_{ij}] \quad [B] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 弹性矩阵[D]

$$[\sigma] = [D] [\varepsilon] \quad [D] = [E]$$

- 应力矩阵[S]

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad [\sigma] = [D] [\varepsilon] = [D] [B] [\delta_{ij}] \quad [S] = [D] [B] = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 单元刚度矩阵[K^e]

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = EA \int_{\Omega} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2.2 结构的刚度矩阵



- 对节点建立平衡方程式，列结构刚度矩阵

➤ 节点力（以坐标系的正向为正！！）：

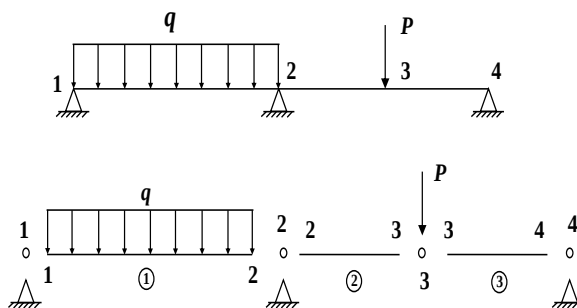
杆元端点力

固端力，节点外载（集中力），支反力=> **外载荷列阵**

结构的刚度矩阵

■ 节点力的平衡方程式

先不考虑支座和约束，列每一节点平衡方程式（不需进行坐标转换）



➤ 杆元端点力

单元1

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_2\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

结构的刚度矩阵



单元2
$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_3\} = \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

单元3
$$\begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_4\} = \begin{Bmatrix} v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix}$$

节点平衡

$$-\{F_1^{(1)}\} + \{P_1\} = 0$$

$$-\{F_2^{(1)}\} - \{F_2^{(2)}\} + \{P_2\} = 0$$

$$-\{F_3^{(2)}\} - \{F_3^{(3)}\} + \{P_3\} = 0$$

$$-\{F_4^{(3)}\} + \{P_4\} = 0$$

结构的刚度矩阵



整个结构节点平衡方程式

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c|c|c|c}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & \\
 \hline
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & \\
 \hline
 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\
 \hline
 & & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}$$

8×8
 8×1
 8×1

$$[K]\{\delta\} = \{P\}$$

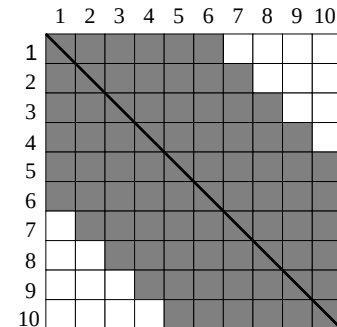
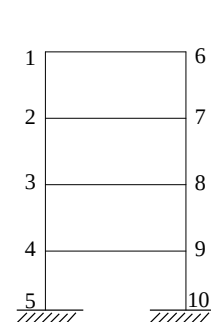
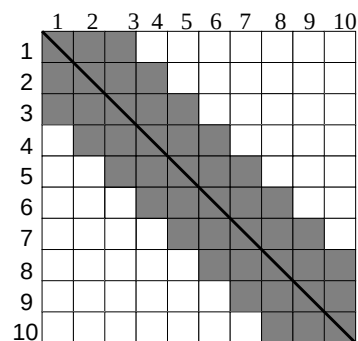
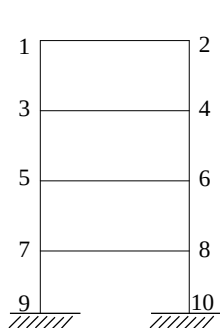
[K]结构刚度矩阵（总刚度矩阵），联系节点位移与节点外力间的关系

- ✓ 对号入座（子矩阵 K_{ij}^e 下标决定总刚中位置，i行，j列），下标相同的子矩阵在同一位置叠加。

结构刚度矩阵性质



- **对称方阵**（对称，主对角元素大于零）
- **带状稀疏阵**（带宽，与节点编号相关）



5.2.3 约束处理及例题



- 上节平衡方程中：

方程数大于未知位移数，未知反力，总刚奇异

- 约束处理

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & \\ & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ & & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

8×8
 8×1
 8×1

- 将位移为零对应的行和列划去

约束处理



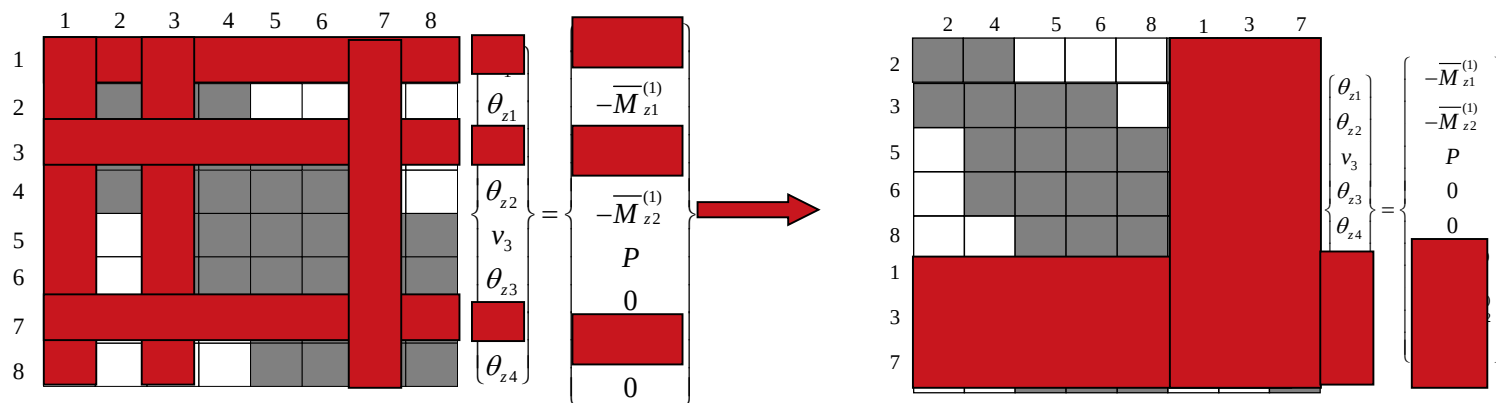
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} \text{Grid} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - \bar{N}_{y1}^{(1)} \\ -\bar{M}_{z1}^{(1)} \\ R_2 - \bar{N}_{y2}^{(1)} \\ -\bar{M}_{z2}^{(1)} \\ P \\ 0 \\ R_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} \text{Grid} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{M}_{z1}^{(1)} \\ -\bar{M}_{z2}^{(1)} \\ P \\ 0 \\ 0 \\ R_1 - \bar{N}_{y1}^{(1)} \\ R_2 - \bar{N}_{y2}^{(1)} \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix}$$

$v_1 \ v_2 \ v_3$ 等于0 即 $\{\delta_B\} = \{0\} \rightarrow [K_{AA}]\{\delta_A\} = \{P_A\}$ 解出 $\{\delta_A\}$

代入 $[K_{BA}]\{\delta_A\} = \{P_B\} \rightarrow$ 解出 $\{P_B\}$

约束处理



$$[K_{AA}]\{\delta_A\} = \{P_A\}$$

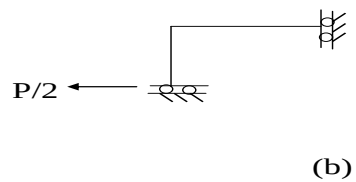
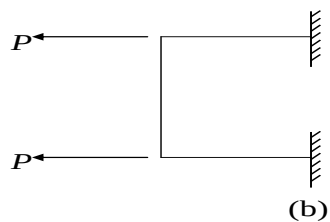
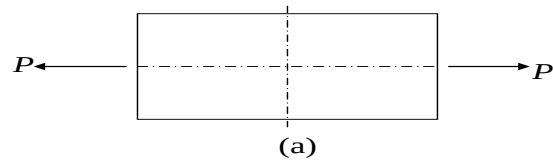
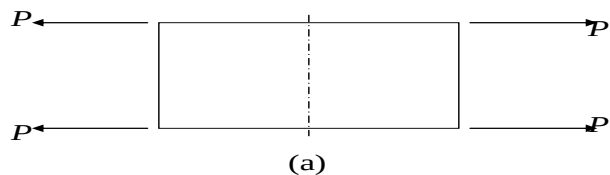
约束处理：划去位移为零的行和列

约束处理



- 计算机处理（位移为零的自由度跳过）
- 弹性支座和弹性固定端
 - 如在自由度 s 有刚度系数为 K_s 的弹性约束，只需将 K_s 加入到对应自由度的主对角线上，对应节点力不再考虑弹性约束的反力
- 强迫位移
 - 右边外力项以一大数乘以强迫位移和对应自由度主对角线刚度系数代替，方程左边对应自由度主对角线刚度系数乘以相同的大数
- 外力为平衡力系的无约束结构
 - 利用对称性简化并添加约束

外力为平衡力系无约束结构的简化



小结

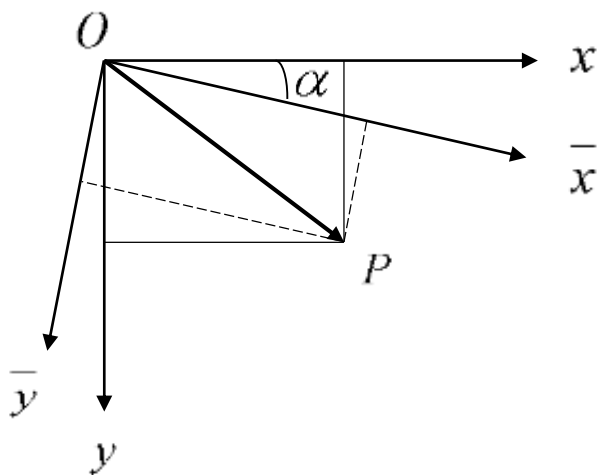


- 结构刚度矩阵（节点力，节点力平衡方程式）
- 结构刚度矩阵组装（对号入座）
- 总刚性质（对称方阵，稀疏带状，带宽与节点编号相关）
- 约束处理（划去位移为零的行列）
- 特殊：弹性约束，强迫位移，外力为平衡力系无约束结构

5.2.4 坐标变换



■ 坐标转换关系



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}$$

- α : 结构坐标轴 Ox 顺时针转到局部坐标轴 $\bar{Ox}$ 为正

力与位移的坐标转换



$$\{F_{ij}\} = [T] \{\bar{F}_{ij}\}$$

$$\{\delta_{ij}\} = [T] \{\bar{\delta}_{ij}\}$$

$$\{P_{ij}\} = [T] \{\bar{P}_{ij}\}$$

其中[T]为转换矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, [t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

杆元刚度矩阵坐标转换



- 杆元刚度矩阵坐标转换关系

$$[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$$

- 杆元刚度矩阵子矩阵的坐标转换关系

$$[K_{ij}^e] = [t][\bar{K}_{ij}^e][t]^T$$

求解步骤



- 结构离散，确定局部坐标和整体坐标系
- 建立杆元刚度矩阵（局部坐标系下）
- 建立整体坐标系下杆元刚度矩阵（坐标转换）
- 组合总刚（对号入座）
- 计算外载荷列阵（固端力对应项亦转换到整体坐标系下）
- 约束处理
- 求平衡方程组 节点位移
- 求杆元内力与变形（节点位移转换到局部坐标系下）

5.3 结构有限元法



工程分析问题，常可归结为在给定条件下求解其控制方程（常微分方程或偏微分方程）的问题，但能用解析方法求出精确解的为少数。

大多数的工程技术问题的解决通常有两种途径：

- 一、简化求解（在有限的情况下可行）。
- 二、借助数值模拟技术（主要是有限元法）。

有限元法的发展



“有限元法”这一名称是1960 年美国的Clough在一篇名为“平面应力分析的有限元法”论文中首先使用的。40 年来，有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题，分析对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。

有限元法的基本思想



- 将问题的求解域划分为一系列单元，单元之间仅靠节点连接。
- 单元内部点的待求量可由单元节点量通过选定的函数关系插值求得；由于单元形状简单，易于用平衡关系或能量关系建立节点量之间的方程式。
- 然后将各个单元方程“组集”在一起而形成总体代数方程组。
- 计入边界条件后即可对方程组求解。

单元划分越细，计算结果就越精确。

有限元法分析计算的思路



- 1) 单元剖分和插值函数的确定。
- 2) 单元特性分析。
- 3) 单元组集。
- 4) 解有限元方程（先约束处理）。
- 5) 计算应力。

有限元法的应用领域



- 结构分析
(确定结构的变形、应变、应力及反作用力等)
- 热分析
- 电磁分析
- 流体分析 (CFD)
- 耦合场分析 - 多物理场

结构分析的类型



- **静力分析**-用于静态载荷，可考虑结构的线性及非线性行为。
- **模态分析** - 计算线性结构的自振频率及振形。谱分析 是模态分析的扩展，用于计算由于随机振动引起的结构应力和应变(也叫作 响应谱或 PSD)。
- **谐响应分析**-确定线性结构对随时间按正弦曲线变化的载荷的响应。
- **瞬态动力学分析**-确定结构对随时间任意变化的载荷的响应，可以考虑与静力分析相同的结构非线性行为。
- **特征屈曲分析**-用于计算线性屈曲载荷并确定屈曲模态形状 (结合瞬态动力学分析可以实现非线性屈曲分析)。
- **专项分析**-断裂分析, 复合材料分析, 疲劳分析。

结构分析的过程



- 前处理 - 节点，单元，材料，截面尺寸，载荷（约束）
- 计算分析 - 单元分析，组合总刚，方程求解，应力计算
- 后处理 - 应力云图，位移云图，振型等

通用有限元程序



到90年代，国际上较大型的面向工程的有限元通用软件达到几百种

ANSYS， NASTRAN， MARC， ABAQUS， ADINA，
SAP

有限元模型

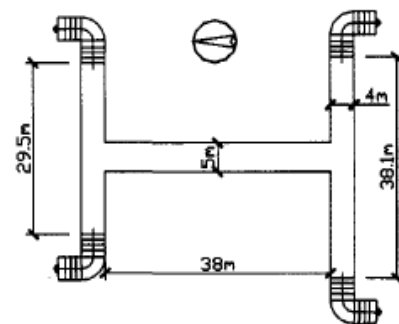
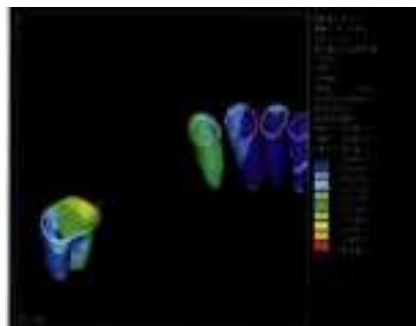
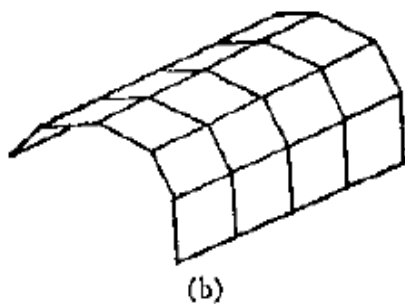


图1 天桥平面图

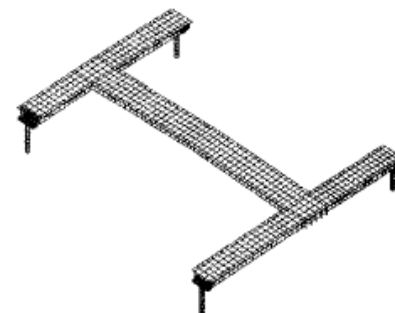
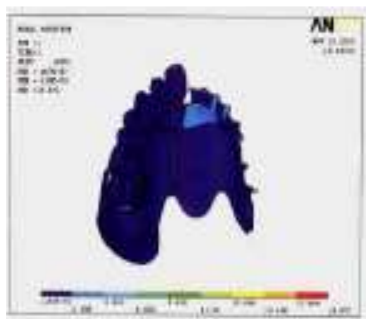
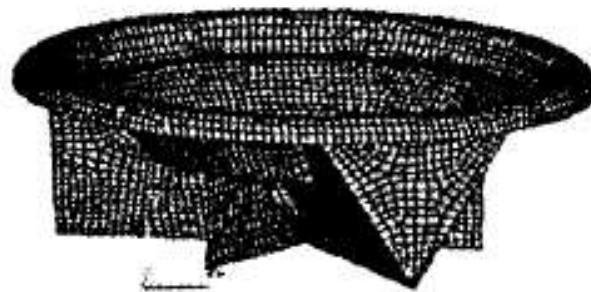


图2 有限元模型图

有限元模型



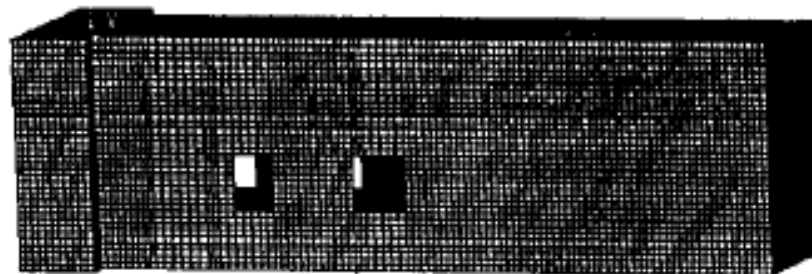
图 1 火箭弹实体模型图



气流场

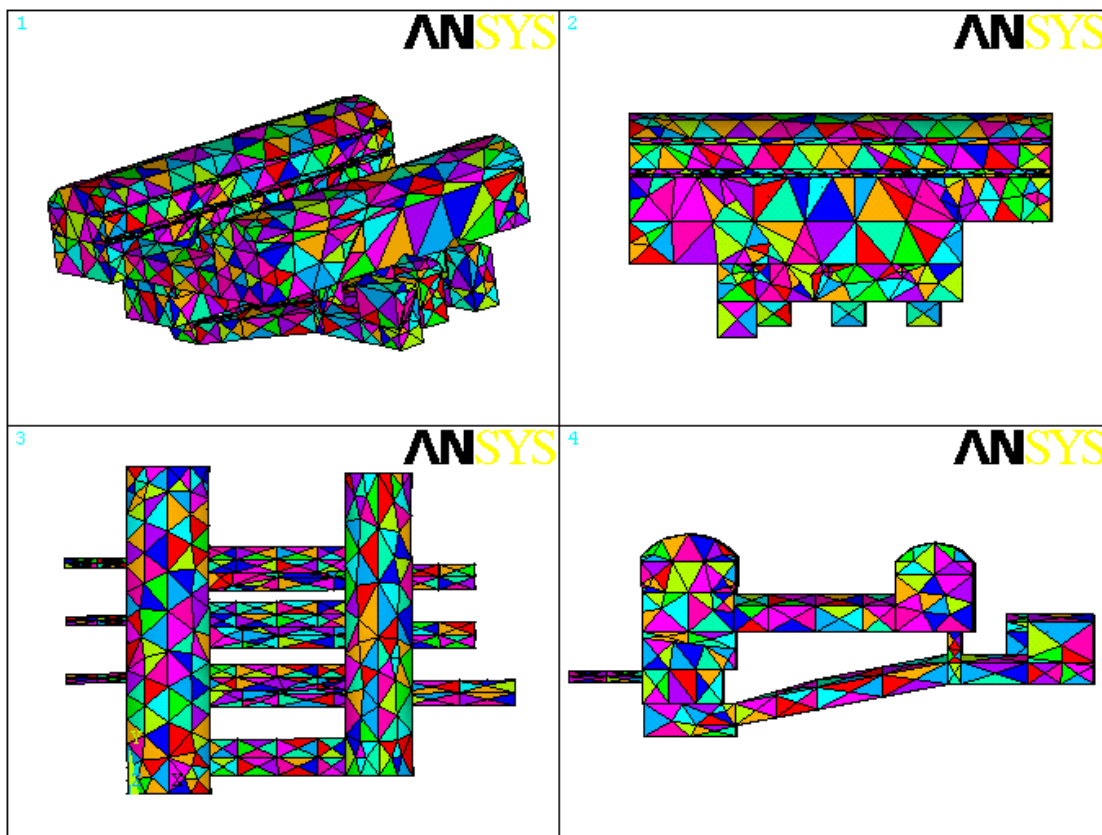
弹体

图 2 火箭弹有限元模型

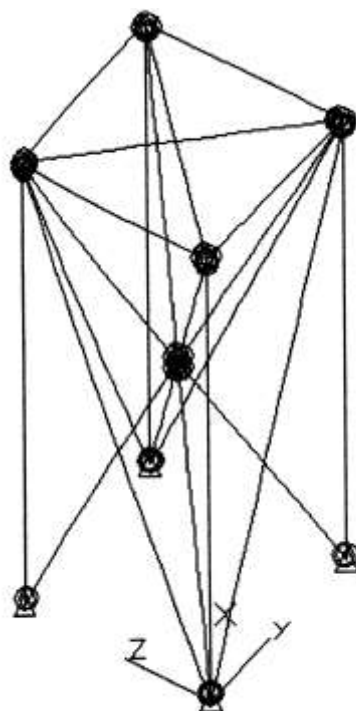
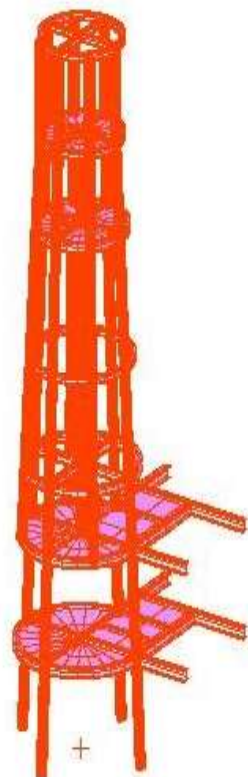


一号线徐家汇站穿越段

有限元模型



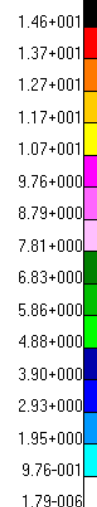
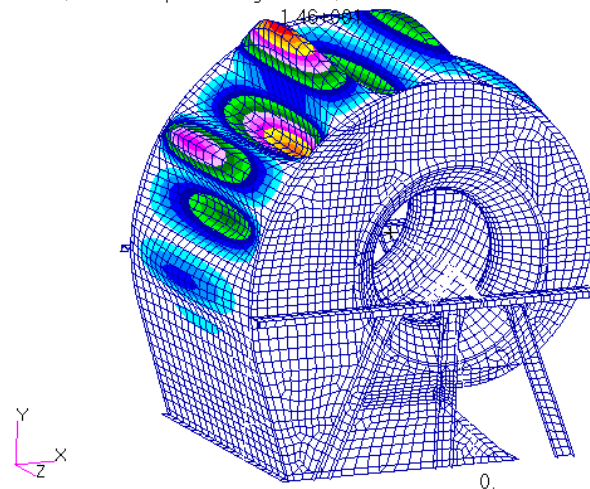
有限元模型



MSC.Patran 2001 r3 25-Sep-06 21:16:41

Fringe: case1, Mode 2:Freq.=38.731: Eigenvectors, Translational-(NON-LAYERED) (MAG)

Deform: case1, Mode 2:Freq.=38.731: Eigenvectors, Translational



default_Fringe :
Max 1.46e+001 @Nd 5019
Min 0. @Nd 1
default_Deformation :
Max 1.46e+001 @Nd 5019

卫星天线支撑架

有限元分析结果

