第三章 结构分析的能量法

3.1 能量法基本概念

3.2 虚位移原理与李兹法

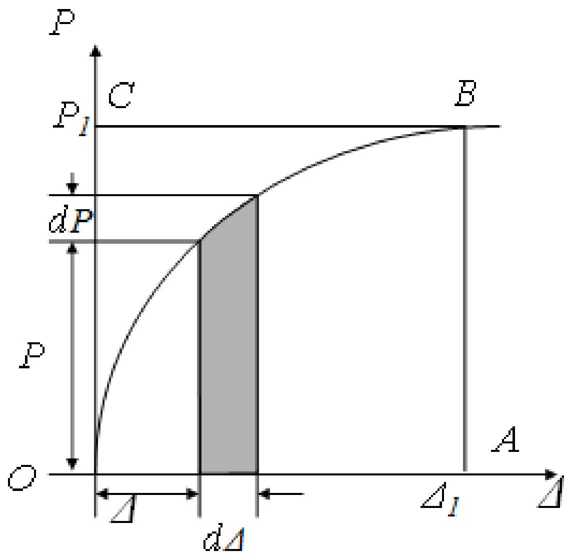
§ 3.1 能量法的基本概念

- 力法，位移法（解析法，初参数）
- 功能的概念求解结构
- 结构的平衡与变形连续条件
- 能量法（变形能法→ 变分法（数学上），有限元）
- 功能关系

➢ 弹性体在外载作用下，外力功转变为变形（应变）能，外力卸变形恢复

➢ 非线性（几何非线性，材料非线性），在外载作用下，外力功转变为变形（应变）能

3.1.2 应变能与余能



- 外力功：

无限小增量$d\Delta$ ，外力功 $dW = Pd\Delta$

整个过程→P1，外力功

为曲线OA下的面积 $W = \int_0^{\Delta_1} Pd\Delta$

- 余功：

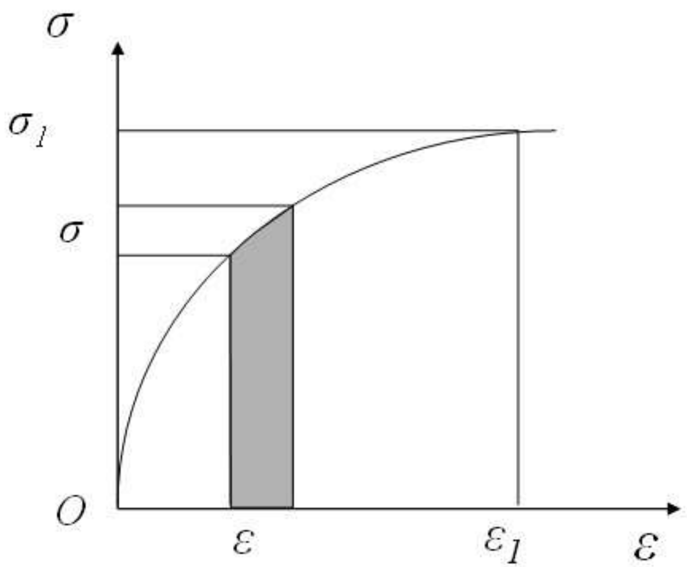
无限小增量 dP ， 外力余功 $dW^* = \Delta dP$

整个过程外力余功

为曲线OA与OP轴所围面积 $W^* = \int_0^{P_1} \Delta dP$

- 等于矩形OABC的面积,故互余 $W + W^*$

应变能



- 弹性体应变能等于外力功： ***V=W***
- 应变能(变形能)：
- 拉杆为例： ***A, l, , Δ, P*** $P=\sigma A$ $\Delta=\varepsilon l$

  则应变能 $V=W=Al\int_0^{\varepsilon_1}\sigma d\varepsilon$

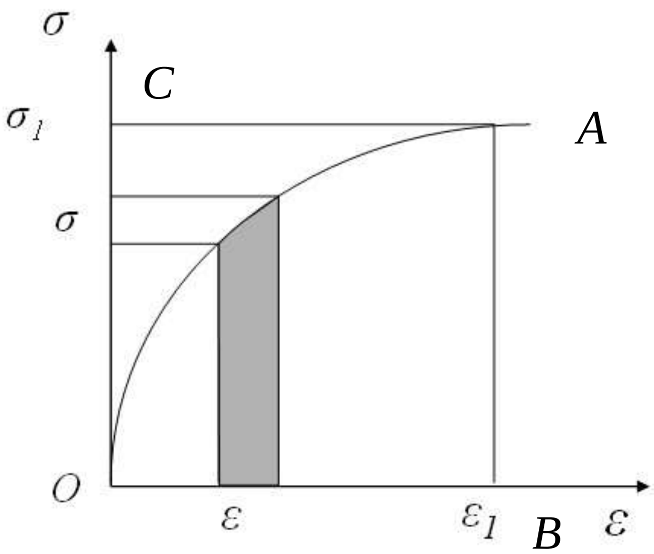
  单位体积应变能 $V_0=\int_0^{\varepsilon_1}\sigma d\varepsilon$ ，为左图中应力应变曲线下面积→**应变能密度（比能）**
- 三维弹性体空间应力状态:

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \qquad \{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T$$

单位体积应变能 $\int(\sigma_x d\varepsilon_x+\sigma_y d\varepsilon_y+\sigma_z d\varepsilon_z+\tau_{xy}d\gamma_{xy}+\tau_{yz}d\gamma_{yz}+\tau_{zx}d\gamma_{zx})$

张量形式 $V_0=\int\{\sigma\}^T\{d\varepsilon\}$ 积分上限为应变最终值。弹性体应变能 $V=\iiint V_0 dxdydz$

余能



- 余能等于余功： V*=W*，V*+V等于矩形OCAB的面积，故互余→余能(应力能)
- 余能(应力能)：
- 拉杆：单位体积余能（余能密度）
- 为左图中应力应变曲线与竖直轴所围面积
- 三维弹性体:单位体积余能

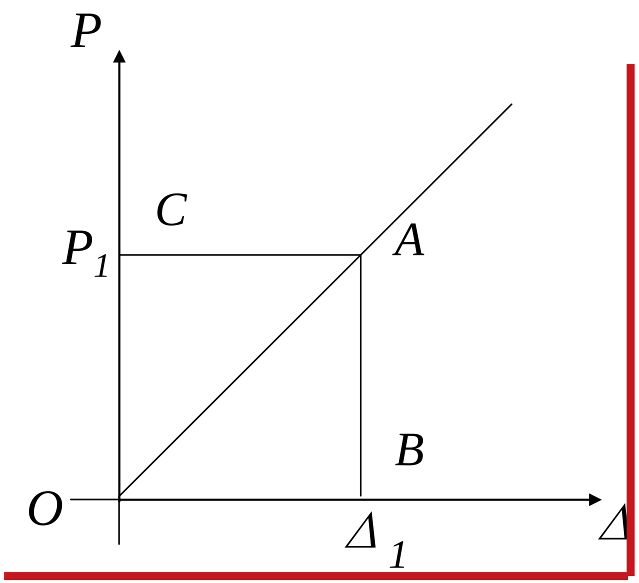
$$V_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma$$

$$\int\left(\varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \varepsilon_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{yz} d\tau_{yz} + \gamma_{zx} d\tau_{zx}\right)$$

张量形式 $V_0^* = \int \{\varepsilon\}^T \{d\sigma\}$ 积分上限为应力最终值 。弹性体余能

$$V^* = \iiint V_0^* dxdydz$$

线性体系



- 功等于余功，应变能等于应力能 W+W*，V*+V等于矩形OCAB的面积，故都为矩形面积的一半
- 设 $P = k\Delta$ 外力功与余功

$$W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta = W^* = \int_0^{P_1} \Delta dP = \frac{1}{2} k \Delta_1^2 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1$$

- 应变能和余能密度

$$V_0 = V_0^* = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} = \int \{\varepsilon\}^T \{d\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma_1\}^T \{\varepsilon_1\}$$

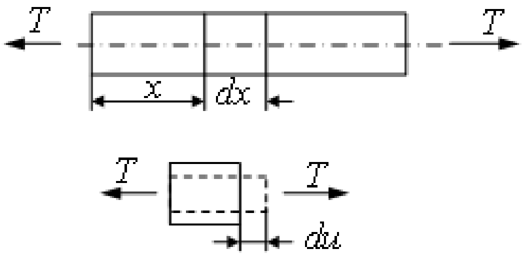
- 弹性体应变能（余能）

$$V = V^* = \frac{1}{2} \iiint \{\sigma_1\}^T \{\varepsilon_1\} dxdydz$$

3.1.3 结构应变能计算方法

- 能量法分析中，应变能和余能计算很重要，大部分线性体系
- 应变能计算方法
  - 取微段
  - 断面力视为外力，微段外力功为变形能
  - 沿杆长积分得杆件应力能
- 拉压，扭转，弯曲（弯曲、剪切），弹性支座和弹性固定端，弹性基础

拉伸和压缩



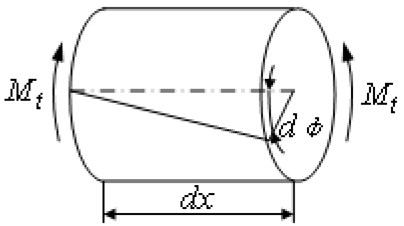
- 微段应变能

$$dV = \frac{1}{2} T du = \frac{1}{2} T \cdot \frac{T dx}{EA} = \frac{1}{2} \frac{T^2 dx}{EA}$$

- 杆件应变能

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EAu'^2 dx$$

扭转



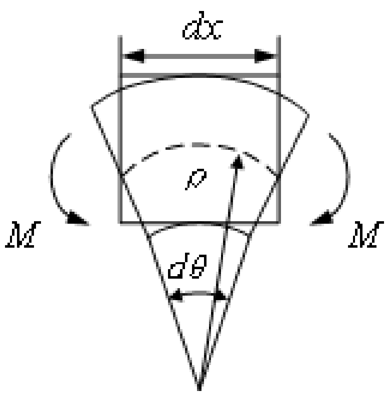
- 微段应变能

$$dV = \frac{1}{2} M_t d\varphi = \frac{1}{2} M_t \frac{M_t dx}{GJ} = \frac{1}{2} \frac{M_t{}^2 dx}{GJ}$$

- 杆件应变能

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t{}^2 dx}{GJ} = \frac{1}{2} \int_0^l GJ \varphi'^2 dx$$

弯曲（弯曲）



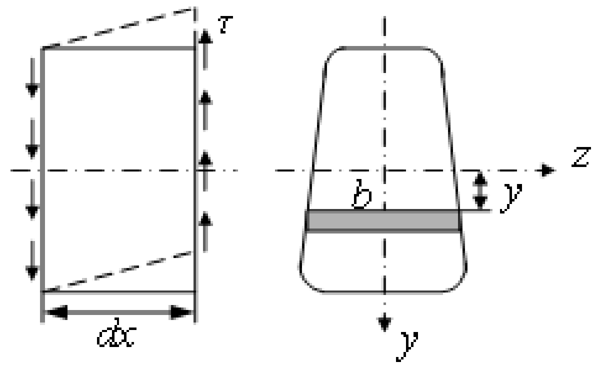
- 微段应变能

$$dV = \frac{1}{2}Md\theta = \frac{1}{2}M\frac{M}{EI}dx = \frac{1}{2}\frac{M^2dx}{EI}$$

- 杆件应变能

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2dx}{EI} = \frac{1}{2}\int_0^l EIv''^2dx$$

弯曲（剪切）



- 微段应变能

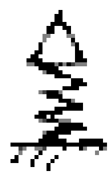
$$dV = \frac{1}{2G}\int_{\Delta}(\frac{NS}{Ib})^2 dAdx = \frac{N^2}{2G}(\frac{1}{I^2}\int_{\Delta}\frac{S^2}{b^2}dA)dx = \frac{1}{2}\frac{N^2dx}{GA_s}$$

- 杆件应变能

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{GA_s}dx = \frac{1}{2}\int_0^l GA_s v_s'^2 dx$$

弹性支座、弹性固定端、弹性基础

- 弹性支座

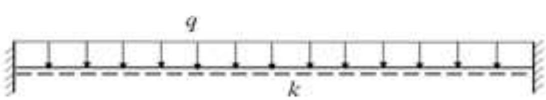


$$V=\frac{1}{2}Rv=\frac{1}{2}AR^2=\frac{1}{2A}v^2$$

- 弹性固定端

$$V=\frac{1}{2}M\theta=\frac{1}{2}\alpha M^2=\frac{1}{2\alpha}\theta^2$$

- 弹性基础



✦ 位移表达的是应变能，用力表达的是余能

杆件应变能

- 杆同时受拉伸（或压缩）、扭转和弯曲力的应变能为

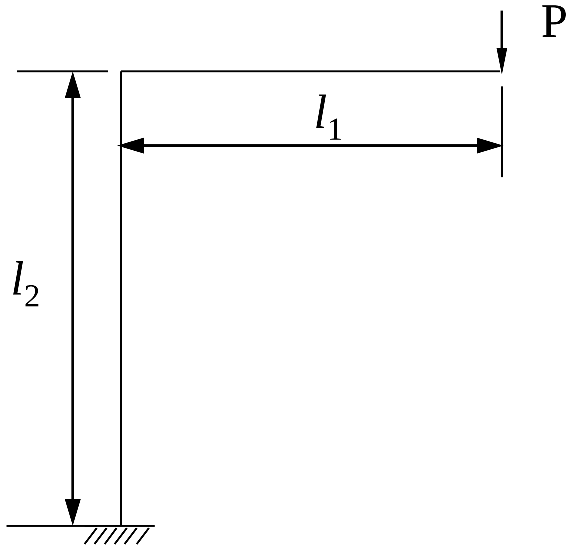
$$V=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2}{EA}dx+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_t^2}{GJ}dx+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{GA_s}dx$$

- 结构体系应变能是所有变形构件应变能之和

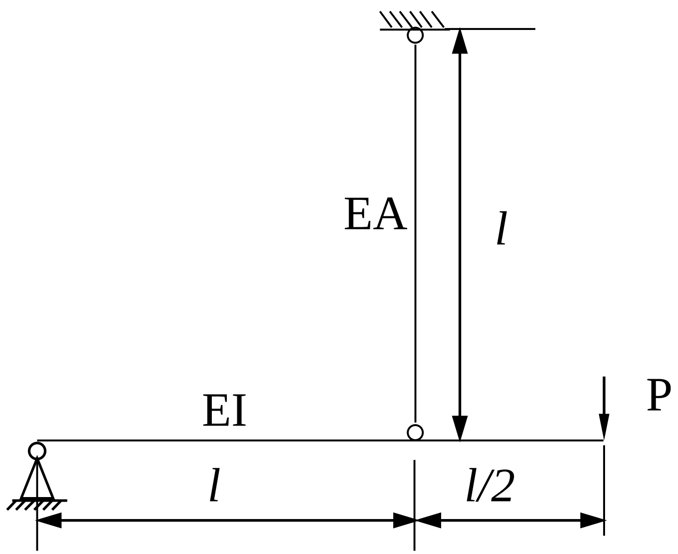
- 杆系应变能计算

杆件应变能

- 例1（EA，EI，GAs）



- 例2（不考虑剪力影响）



板应变能计算

- 应变能计算

$$V=\frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dxdydz$$

其中

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{x}}\\ \varepsilon_{\mathrm{y}}\\ \gamma_{\mathrm{xy}}\end{Bmatrix}=-z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{x}}=-\dfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ \sigma_{\mathrm{y}}=-\dfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ \tau_{\mathrm{xy}}=-\dfrac{Ez}{1+\mu}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{cases}$$

应变能计算

由挠曲面给出的应变能表达式

$$V=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\iiint z^2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\left(1-\mu\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdydz$$

对z积分，得板应变能

$$V=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(1-\mu\right)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy$$

D为板弯曲刚度

应变能计算

板四边挠度为零时，板的应变能

$$V = \frac{D}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dxdy$$

3.2 虚位移原理与李兹法

- 虚位移原理

真实力系在任意满足变形协调条件的虚位移过程中做功的情况，等价于平衡条件

- 虚力原理

任一组满足平衡条件的虚力系在真实位移过程中做功的情况，等价于变形协调条件

3.2.1 虚位移原理及应用

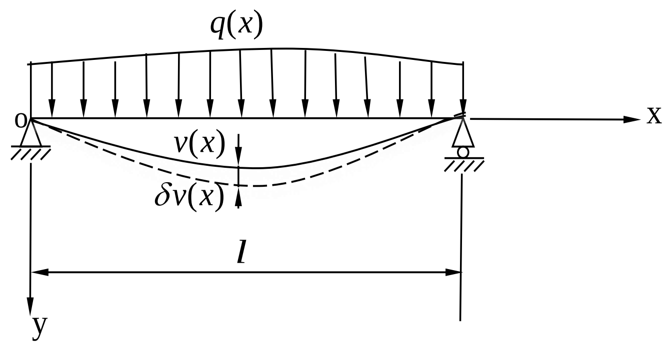
- 虚位移：无穷小，满足位移边界条件，不破坏结构连续（可能发生的位移），力不变（方向，大小）
- **δW=δV**

真实外力×虚位移=∫**Ω**（真实应力×虚应变）**d Ω**

- 等价于结构的平衡条件

虚位移原理

- 两端简支梁



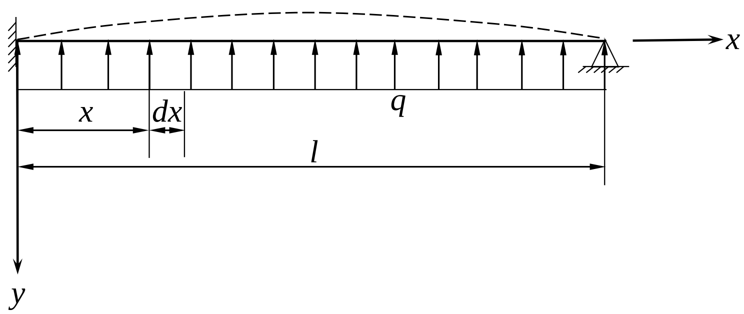
➢必要： 平衡 $\longrightarrow \int_0^l (EIv^{IV} - q)\delta v dx + EIv''\delta v'\Big|_0^l = 0 \longrightarrow \delta W = \delta V$

➢充分： $\delta W = \delta V \longrightarrow \int_0^l (q\delta v - EIv''\delta v'')dx = 0$

$$\longrightarrow \int_0^l (EIv^{IV} - q)\delta v dx + EIv''\delta v'\Big|_0^l - EIv'''\delta v\Big|_0^l = 0 \longrightarrow \text{平衡}$$

虚位移原理

- 考虑一端固定、一端简支梁



虚位移原理的应用

- 位能驻值原理
- 应变能原理
- 单位位移法

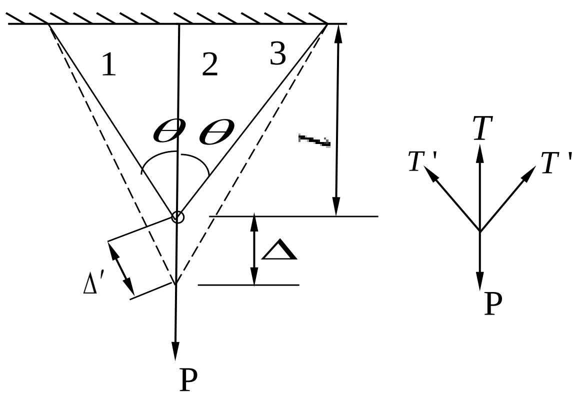
位能驻值原理

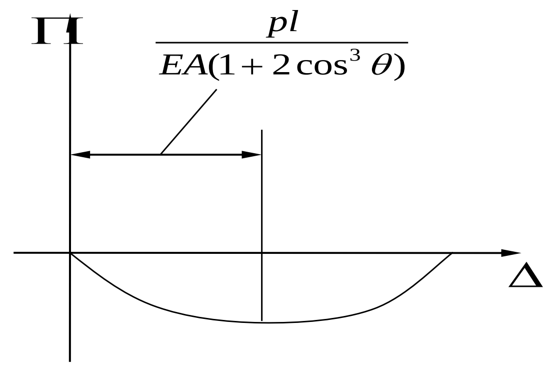
- 虚位移原理 $\delta V=\delta W \quad \delta W=\sum_i P_i\delta\Delta_i=\delta\sum_i P_i\Delta_i$
- 引入力函数 $U=\sum_i P_i\delta\Delta_i$
- 单位位移法 $-U=-\sum_i P_i\delta\Delta_i$
- 虚位移原理改写为 $\delta(V-U)=0$

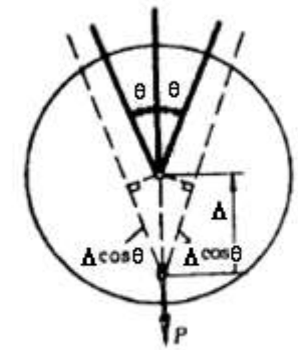
总位能Π = 应变能V − 力函数U（应变能 + 力位能） $\delta\Pi=0$

- 表示总位能有驻值，对于弹性体的稳定平衡，总位能将是极小值→最小位能原理

静不定桁架求解







- 结构应变能计算，V1，V2，V3
- 力函数计算
- 总位能取极值求解
- D-P曲线

应变能原理（卡氏第一定理）

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1+\frac{\partial V}{\partial \Delta_2}\delta\Delta_2+\frac{\partial V}{\partial \Delta_3}\delta\Delta_3+\cdots$$

- 虚位移原理 $\delta W=\delta V$ $\qquad \delta W=P_1\delta\Delta_1+P_2\delta\Delta_2+\cdots$
  - 故 $(\frac{\partial V}{\partial \Delta_1}-P_1)\delta\Delta_1+(\frac{\partial V}{\partial \Delta_2}-P_2)\delta\Delta_2+(\frac{\partial V}{\partial \Delta_3}-P_3)\delta\Delta_3+\cdots=0$
  - 虚位移的任意性
- 结构应变能对某一广义位移的偏导数等于此位移相应的广义力

$$\frac{\partial V}{\partial \Delta_k}=P_k$$

- 代表结构力的平衡条件，可用来建立位移法方程式

单位位移法

- 若结构仅在i处发生一单位虚位移 $\delta\Delta_i = 1$，则有

$$P_i \times 1 = \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\varepsilon^0\} d\Omega$$

$\{\varepsilon^0\}$是由单位虚位移引起的虚应变。

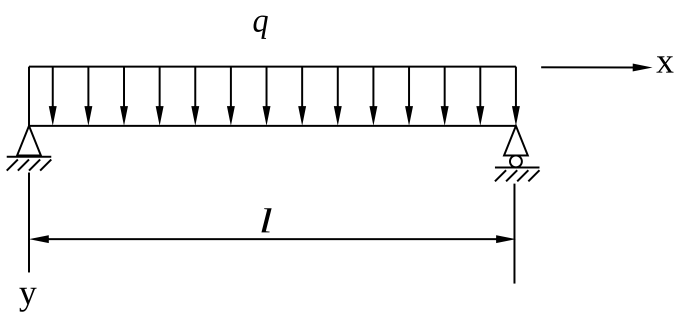
- 可应用于单刚矩阵计算。

3.2.2 李兹法及其应用

- 近似解法，应用范围广
- 李兹法：利用位能驻值原理将变分问题看作包含有有限多个变量的普通函数的极值问题
- 具体做法：
  - 挠曲线写成级数形式（基函数，形状函数，容许函数）
  - 将挠曲线代入总位能的表达式
  - 总位能取极值的条件得到待定系数值（总位能对所有待定系数的偏导为0）

基函数只须满足位移边界条件

李兹法求解

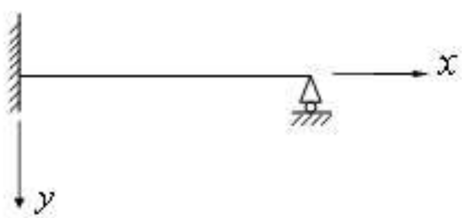


- 基函数（位移边界条件？）
- 应变能（变断面？变材料？中间有弹性支座？）
- 力函数（力位能，P，M，q分段）
- 总位能？
- 求解

基函数

序号	梁的形式与运动条件	基函数
1		1. $v = a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin\frac{2\pi x}{l} + a_3\sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots$ （任意荷重，坐标原点在支座） 2. $v = a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin\frac{3\pi x}{l} + a_3\sin\frac{5\pi x}{l} + \cdots$ （对称荷重，坐标原点在支座） 3. $v = a_1\cos\frac{\pi x}{l} + a_2\cos\frac{3\pi x}{l} + a_3\cos\frac{5\pi x}{l} + \cdots$ （对称荷重，坐标原点在中央） 4. $v = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)^2 + a_3 x^3(1-x)^3 + \cdots$ （对称荷重，坐标原点在支座）
2		1. $v = a_1(1-\cos\frac{\pi x}{2l}) + a_2(1-\cos\frac{3\pi x}{2l})$ $+a_3(1-\cos\frac{5\pi x}{2l}) + \cdots$（任意荷重） 2. $v = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots$（任意荷重）

基函数

3		1. $v = a_1(1-\cos\frac{2\pi x}{l}) + a_2(1-\cos\frac{4\pi x}{l}) + a_3(1-\cos\frac{6\pi x}{l}) + \cdots$(任意荷重) 2. $v = a_1x^2(1-x)^2 + a_2x^3(1-x)^3 + \cdots$ （任意荷重）
4		1. $v = a_1(\cos\frac{\pi x}{2l} - \cos\frac{3\pi x}{2l}) + a_2(\cos\frac{3\pi x}{2l} - \cos\frac{5\pi x}{2l}) + \cdots$(任意荷重) 2. $v = a_1x^2(1-x) + a_2x^3(1-x) + \cdots$ （任意荷重） 3. $v = a_1x^2(x-l) + a_2x^3(x^2-l^2) + \cdots$ （任意荷重）

刚性板弯曲的能量解法

- 应变能计算

$$V=\frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dxdydz$$

其中

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x}\\ \varepsilon_{y}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=-z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}\sigma_{x}=-\dfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ \sigma_{y}=-\dfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ \tau_{xy}=-\dfrac{Ez}{1+\mu}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{cases}$$

应变能计算

由挠曲面给出的应变能表达式

$$V=\frac{E}{2\left(1-\mu^{2}\right)}\iiint z^{2}\left[\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right)^{2}+\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}\right)^{2}+2\mu\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}\right)^{2}\right]dxdydz$$

对z积分，得板应变能

$$V=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}\right)^{2}+2(1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}\right)^{2}-\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}\right]\right\}dxdy$$

D为板弯曲刚度

应变能计算

板四边挠度为零时，板的应变能

$$V = V^* = \frac{1}{2}\iiint \{\sigma_1\}^T \{\varepsilon_1\} dxdydz$$

力函数

横荷重**q**

$$U = \iint q(x,y)\,w(x,y)\,dxdy$$

集中力**P**

$$U = Pw$$

板的总位能和求解

$$\Pi = V - U$$

$$= \iint \left\{ \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - qw \right\} dxdy$$

选择挠曲面（基函数/形状函数满足位移边界条件）

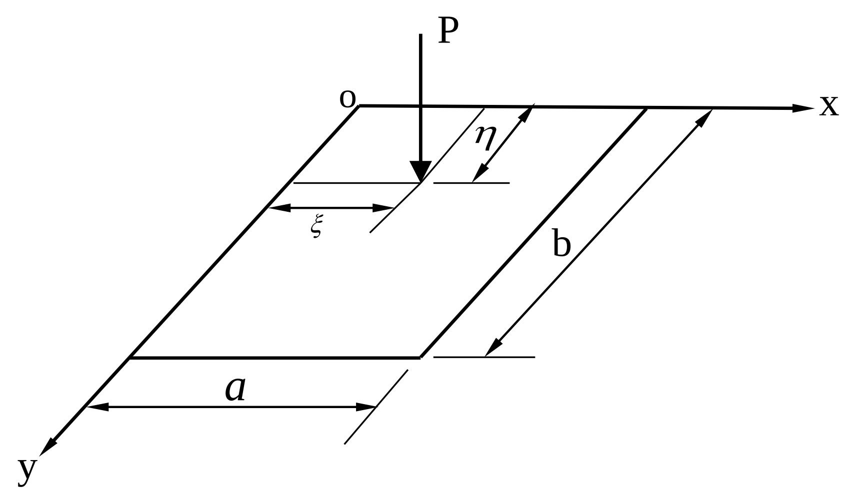
$$w(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y)$$

代入总位能表达式，据总位能取极值确定代定系数，即确定挠曲面

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0, m = 1, 2, 3...; n = 1, 2, 3...$$

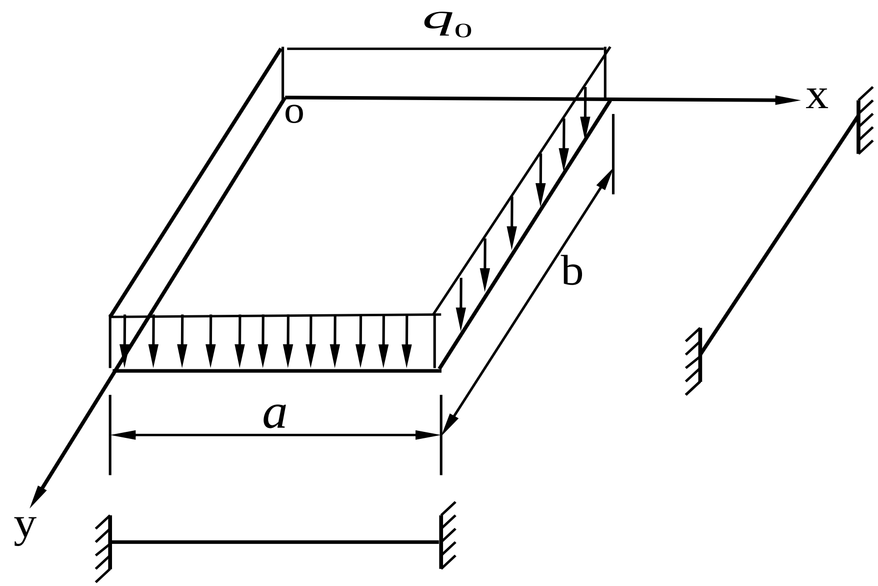
例1 四边形自由支持的矩形板，在x=ξ,y=η处受有集中力P，试用李兹法求此板的挠曲面。

- 解析解答?
- 挠曲面? 应变能? 力函数? 总位能? 位能极值条件?



例2 用李兹法求均布荷重q_0作用下四边刚性固定的矩形板的弯曲，如图所示：

- 解析解答?
- 挠曲面? 应变能? 力函数? 总位能? 位能极值条件?



小结

- 挠曲面选取（根据位移边界参考梁挠曲线基函数形式）
- 应变能计算（考虑所有可变形构件，加强筋，弹性约束）

$$V=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy$$

- 板四边挠度为零时，板的应变能 $V=\frac{D}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dxdy$

- 力位能计算

横荷重q $U=\iint q(x,y)w(x,y)dxdy$ 集中力P $U=Pw$

- 总位能计算 $\Pi=V-U$
- 由总位能取极值求待定系数 $\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}}=0, m=1,2,3\ldots; n=1,2,3\ldots$