第1章　动态信号特性分析

在动态测试中，我们会遇到大量的信号或数据需记录和分析，这些动态信号或数据就是激励与响应的测量结果。所有动态信号或数据可分为两大类，即确定性与非确定性，非确定性信号也称为随机信号。

所谓确定性信号，是可用明确的数学方程精确地描述一个物理现象的动态过程。它包括周期信号和非周期信号。确定性动态信号无论在时域或频域都有自身的特点。

1.1 确定性动态信号的时域和频域特性

1.1.1 周期信号

周期信号又可按其复杂程度分为最简单的正弦信号和一般的周期信号。

例如，单自由度无阻尼振动系统的自由振动位移就是典型的正弦信号，可用下列时变函数表示

$$x(t) = X\sin(2\pi f_0 t + \theta) \tag{1.1}$$

式中，X 为振动位移振幅，单位是m；f_0为频率，单位时间内重复出现的循环数，单位是Hz ；θ 为相对于时间原点的初始相角，单位是弧度；$x(t)$ 为振动位移在时间t瞬时的值，单位是m。方程(1.1)描述的随时间变化的记录曲线，即时间历程，常称正弦波。实践中分析正弦信号时，常忽略相角 θ ，有

$$x(t) = X\sin 2\pi f_0 t \tag{1.2}$$

方程(1.2)可画成时间历程图或振幅频率图－频谱，见图 1-1。

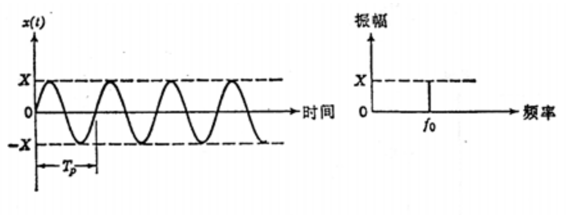


图 1-1

正弦信号完成一个循环所需时间，称为周期 T_p 。如上述，单位时间内出现的循环数称为频率f_0，两者的关系是

$$T_p = \frac{1}{f_0} \tag{1.3}$$

注意到，图 1.1 的频谱仅由一个具体频率f_0上的振幅 X 构成。这样的频谱称为离散谱或线谱。从分析的观点来看，正弦信号是时变数据的最简形式。

一般的周期信号是经过一定的时间间隔重复出现的信号，能用周期性的时变函数表示

$$x(t) = x(t \pm nT_p), \quad n = 1,\ 2, 3, \cdots \tag{1.4}$$

在时域中，这一函数的最简单形式可表现为周期是 T_p 的正弦波（称基波）的整数倍的波形（称谐波）。显然，$T = nT_p$ 为一般的周期信号的周期。

在实践中，除少数例外，一般的周期信号都可按下列公式展开为 Fourier 级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n con 2\pi f_1 t + b_n \sin 2\pi f_1 t) \tag{1.5}$$

其中 $f_1 = \frac{1}{T_p}$，称为基频

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} x(t)\cos 2\pi n f_1 t dt,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} x(t)\sin 2\pi n f_1 t dt,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

它们还可表达为另一种 Fourier 级数形式

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n) \tag{1.6}$$

其中 $X_0 = \frac{a_0}{2}$

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\theta_n = \tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n}), n = 1, 2, 3, \cdots$$

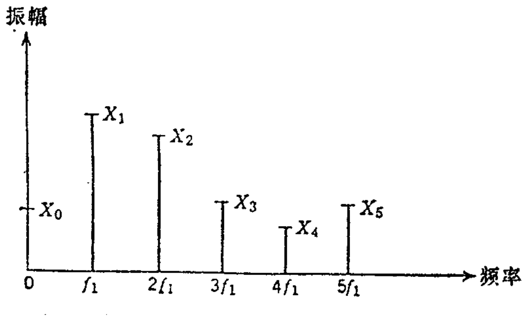


图 1-2

式(1.6)表明周期信号由一个静态分量 X_0 和无限个称为谐波的简谐（正弦或余弦）分量组成，这些谐波分量的振幅为 X_n，相位为 θ_n，频率是基频 f_1 的 n 整数倍。

实践中，谐波分量的相角常被忽略。式(1.6)可用图 1-2 中的离散谱表征。周期信号有时只包含几个分量，有时基波振幅也可为 0。例如，一个周期时间历程由 3 个正弦波叠加而成，各正弦波的频率分别为 60Hz、75Hz 和 100Hz。它们的最大公约数是 5，故基频为 5Hz。展成 Fourier 级数时，除 $n=12, n=15$ 和 $n=20$ 以外，其他所有的 X_n 值为 0。

1.1.2 非周期信号

非周期信号有 2 种： 2 个或多个独立的周期信号混合作用时，但无公共的整数倍周期，也称准周期信号；能用时变函数描述，但无周期特征，如描述冲击或爆裂过程的信号等，也称瞬变信号。

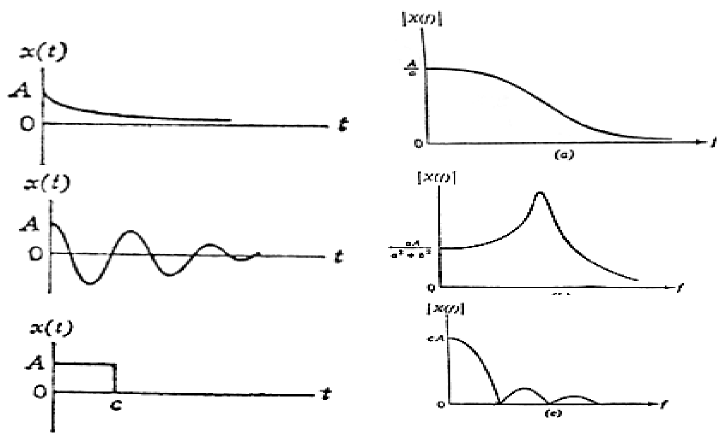
准周期信号依然能用频域中的离散谱表征，与周期信号的差别在于各分量的频率不再是有理数关系。而瞬变信号不能用离散谱表征。在大多数情况下，瞬变信号可用 Fourier 积分表示成连续谱

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.8}$$

Fourier 谱 $X(f)$ 一般是复数，它可表示成

$$X(f)=|X(f)|e^{-j\theta(f)}$$

其中 $|X(f)|$ 是 $X(f)$ 的模，$\theta(f)$ 是幅角。图 1-3(b)表示图 1-3(a)中 3 个瞬变时间历程的 Fourier 谱。



（a） (b)

图 1-3

1.2 随机信号的统计特性

随机动态信号是指一类信号数据不能用精确的数学关系式描述，因为这种信号的每次观察都不一样。任何一次观察只代表许多可能的结果之一。这些信号在性质上是随机的，只能用概率术语和统计平均来描述。

1.2.1 随机过程

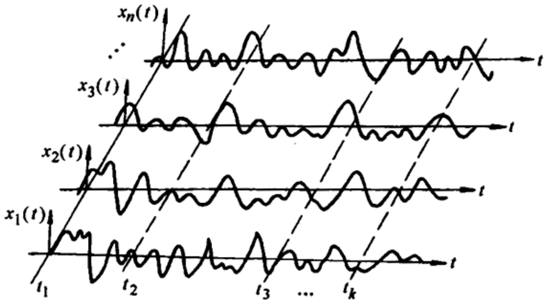


图 样本函数和随机过程

描述随机信号的单个时间历程，称为样本函数或样本记录。表示随机信号的全部样本函数的集合，称为随机过程。随机过程可分为平稳和非平稳两类。平稳随机过程又可进一步分为各态历经和非各态历经两类。

随机过程在任何时刻的特性可用其样本函数集合（也称总体）的平均值描述。随机过程在某一时刻t_1的均值（一阶矩）可将总体中各样本函数在t_1的瞬时值相加，然后除以样本函数的个数而得到。随机过程两不同时刻之值的相关性（两阶矩，也称自相关函数），可用t_1和$t_1+\tau$两时刻瞬时值乘积的总体平均值得到。若用$\{x(t)\}$记样本函数的总体，于是随机过程$\{x(t)\}$的均值$\mu_x(t_1)$和自相关函数$R_x(t_1,t_1+\tau)$分别为

$$\mu_x(t_1)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1) \tag{1.9}$$

$$R_x(t_1,t_1+\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1)x_k(t_1+\tau) \tag{1.10}$$

这里，各样本函数具有等可能性。

一般情况下，均值$\mu_x(t_1)$和自相关函数$R_x(t_1,t_1+\tau)$都随t_1的改变而变化，此时随机过程$\{x(t)\}$称为非平稳过程。若两者不随t_1变化，则称随机过程$\{x(t)\}$是弱平稳的，或广义上称平稳随机过程。故平稳随机过程的均值是常数，其自相关函数仅与时间位移τ有

关。即

$$\mu_x(t_1)=\mu_x \tag{1.11}$$

$$R_x(t_1,t_1+\tau)=R_x(\tau) \tag{1.12}$$

若由平稳随机过程的任何单个样本的时间平均求得的均值和自相关函数等都等于由全体样本的系集平均求得的相应值，则该平稳过程称为各态历经过程。这样，各态历经随机过程的均值、自相关函数等所有特性均可用单个样本函数的时间平均来描述。实践中表示平稳随机过程的随机信号，一般都是各态历经的。因此在大多数情况下，都可用单个观察到的时间历程记录来计算平稳随机信号的特性。

1.2.2 均方值、均值与方差

假定随机信号是平稳的和各态历经的，从而可用单个样本记录的时间平均来研究它的特性。随机信号的一般强度（平均功率或能量的概念）可用其均方值ψ_x^2描述

$$\psi_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \tag{1.13}$$

均方值的正平方根称为均方根值。

人们常把随机信号写成静态分量（不随时间变化的分量）和动态分量（波动分量）之和。静态分量可用均值来描述

$$\mu_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1.14}$$

动态分量可用方差描述，方差是关于均值的均方值，即

$$\sigma_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu_x]^2 dt \tag{1.15}$$

方差的正平方根称为标准差。展开式(1.15)可知方差等于均方值减去均值的平方

$$\sigma_x^2=\psi_x^2-\mu_x^2 \tag{1.16}$$

1.2.3 概率密度函数

研究随机信号的概率密度函数是为了表示瞬时数据落在某指定幅值范围内的概率。考虑图 1-4 所示的样本时间历程记录$x(t)$。$x(t)$值落在x和$(x+\Delta x)$范围内的概率可取T_x/T之比得到。T_x是在观察时间T内，$x(t)$落在$(x, x+\Delta x)$范围内的总时间。

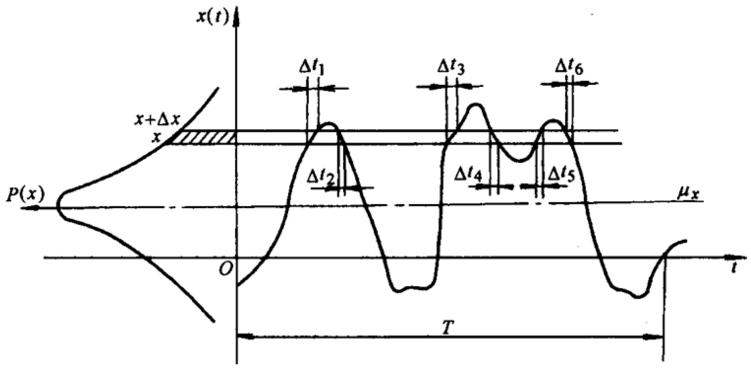


图 1-4

$$\Pr ob[x < x(t) \le x + \Delta x] = \lim_{T \to \infty} \frac{T_x}{T}$$

(1.17)

于是，可定义概率密度函数 $p(x)$

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr ob[x < x(t) \le x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [\lim_{T \to \infty} \frac{T_x}{T}] \qquad (1.18)$$

显然，$p(x)$ 恒为实值非负函数。

瞬时值 $x(t)$ 小于或等于某值 x 的概率定义为概率分布函数或累积概率分布函数 $P(x)$

$$P(x) = \Pr ob[x(t) \le x] = \int_{-\infty}^{x} p(\xi) d\xi \qquad (1.19)$$

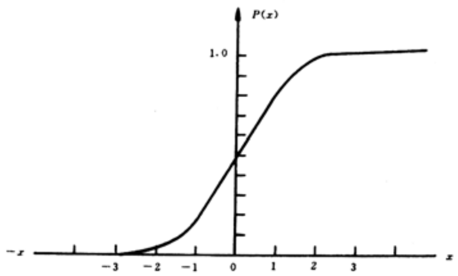


图 概率分布函数

用概率密度函数表示随机信号的均值和均方值

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \qquad (1.20)$$

$$\psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \qquad (1.21)$$

1.2.4 自相关函数

随机信号的自相关函数是描述一个时刻的瞬时值与另一个时刻的瞬时值之间的依赖关系。根据上述的平稳和各态历经的假定，可写成

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \tag{1.22}$$

可证明 $R_x(\tau)$ 为实值偶函数，且在 $\tau = 0$ 时有最大值，即

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \tag{1.23}$$

$$R_x(0) \ge \left|R_x(\tau)\right|, \quad R_x(0) = \max R_x(\tau) = \varphi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \tag{1.24}$$

注意到，确定性周期函数的自相关函数也是周期函数，且周期相同。

1.2.5 自功率谱密度函数

任何信号还可作频域分析。频域分析是研究信号的频率结构，即发现信号含有哪些频率分量，这些分量的大小、强弱如何。人们通过使用随机信号的均方值的谱密度描述信号在频域中的频率结构，将它称为随机信号的功率谱密度或自功率谱密度，该值反映信号的能量在各个频率上的分布，是随机过程的最重要的特征参数之一。对于平稳随机过程，可证明功率谱密度与自相关函数是一对 Fourier 变换

$$G_x(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 4\int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau \tag{1.25}$$

上面第 2 个等式的出现，是因 $R_x(\tau)$ 是 τ 的偶函数。随机信号 $x(t)$ 的均方值为

$$\psi_x^2 = \int_0^{\infty} G_x(f)df \tag{1.26}$$

可见，均方值等于功率谱密度函数曲线下的总面积。注意到自功率谱密度或简称自谱是单边谱，恒为实函数。

1.3 随机信号的联合特性

1.2 所讨论的是单个随机信号的统计特性。但实际中还常希望描述来自两个或几个随机信号的共同统计特性或联合特性。

1.3.1 联合概率密度函数

两个随机信号的样本记录的联合概率密度函数，代表两个样本记录在某瞬间同时落在某对指定幅值范围内的概率。考察图 1-5 所示的一对时间历程记录 $x(t)$ 和 $y(t)$。计算 $x(t)$ 值落在 $(x, x+\Delta x)$ 范围内而 $y(t)$ 值同时落在 $(y, y+\Delta y)$ 范围内的概率。注意到 $T_{x,y}$ 是在考察时间 T 内，$x(t)$ 和 $y(t)$ 同时分别落在 $(x, x+\Delta x)$ 和 $(y, y+\Delta y)$ 中的总时间。于是，联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\Pr ob[x<x(t)\le x+\Delta x, y<y(t)\le y+\Delta y]=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[\lim_{T\to\infty}\frac{T_{x,y}}{T}] \quad (1.27)$$

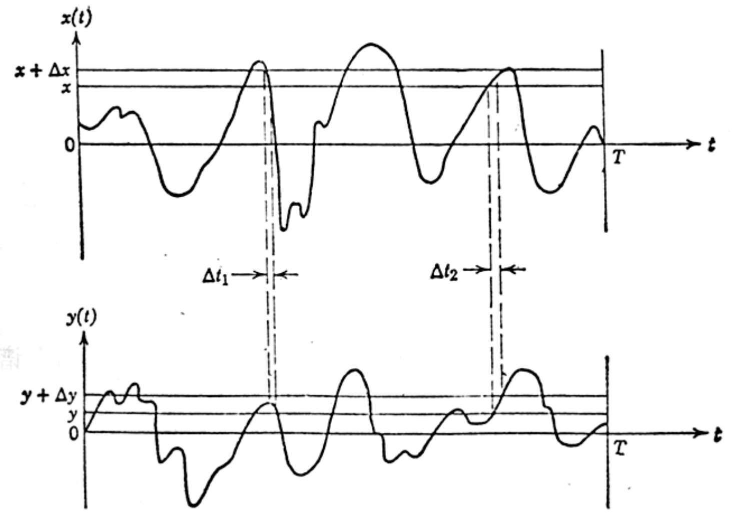


图 1-5

联合概率分布函数为

$$P(x,y)=\Pr ob[x(t)\le x, y(t)\le y]=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (1.28)$$

若所研究的两个随机信号是统计独立的，则，联合概率密度函数为

$$p(x,y)=p(x)p(y) \quad (1.29)$$

1.3.2 互相关函数

两个随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 是表示信号 $x(t)$ 在 t 时刻的瞬时值与信号 $y(t)$ 在 $(t+\tau)$ 时刻的瞬时值之间的依赖关系。类似自相关函数的定义有

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \tag{1.30}$$

$R_{xy}(\tau)$ 是可正可负的实值函数，它不一定在 $\tau=0$ 取最大值，也不是偶函数。但有

$$R_{xy}(-\tau)=R_{yx}(\tau) \tag{1.31}$$

且有

$$\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le R_x(0)R_y(0) \tag{1.32}$$

$$\left|R_{xy}(\tau)\right| \le \frac{1}{2}[R_x(0)+R_y(0)] \tag{1.33}$$

当 $R_{xy}(\tau)=0$ 时，称 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是不相关。一般有

$$\mu_x\mu_y-\sigma_x\sigma_y \le R_{xy}(\tau), R_{yx}(\tau) \le \mu_x\mu_y+\sigma_x\sigma_y \tag{1.34}$$

通常有 $R_{xy}(\pm\infty)\to\mu_x\mu_y\leftarrow R_{yx}(\pm\infty)$ 。

1.3.3 互功率谱密度函数

一对随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时间历程记录的互功率谱密度函数或简称互谱密度是互相关函数的 Fourier 变换

$$G_{xy}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

因互相关函数不是 τ 的偶函数，故互谱密度函数有如下的复形式

$$G_{xy}(f)=C_{xy}(f)-jQ_{xy}(f) \tag{1.35}$$

其中实部 $C_{xy}(f)$ 称为共谱密度函数，虚部 $Q_{xy}(f)$ 称为正交谱密度函数。$G_{xy}(f)$ 与 $G_{yx}(f)$ 互为共轭复函数。

互谱密度函数与自谱密度函数有下列关系式

$$\left|G_{xy}(f)\right|^2 \le G_x(f)G_y(f) \tag{1.36}$$

互谱密度函数用到具体问题中时，常采用下式

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{\left|G_{xy}(f)\right|^2}{G_x(f)G_y(f)} \le 1 \tag{1.37}$$

$\gamma_{xy}^2(f)$ 称为相干函数或凝聚函数。若在某具体频率上，相干函数为 0，则称两个信号在此频率上不相干，这是不相关的另一种说法。若两个信号统计独立，则对所有频率，相干函数为 0；反之，对所有频率，相干函数为 1，则称两信号是完全相干的。互谱密度函数应用起来常写成极坐标形式

$$G_{xy}(f)=\left|G_{xy}(f)\right|e^{-j\theta_{xy}(f)} \tag{1.38}$$

1.4 传递函数和频率响应函数

通常动态系统被假设为常系数线性系统，且为稳定的。若 $h(t)$ 是某系统对单位脉冲力 $\delta(t)$ 的位移响应函数，（注意到，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$）则对任意确定性输入 $x(t)$，系统的确定性输出 $y(t)$ 可由卷积积分表示

$$y(t)=\int_0^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{1.39}$$

当输入有界，$h(t)$ 绝对可积，则输出也是有界的，从而系统是稳定的。

常系数线性系统的动态特性可用传递函数 $H(p)$ 来表征，$H(p)$ 定义为 $h(t)$ 的 Laplace 变换

$$H(p)=\int_0^{\infty}h(t)e^{-pt}dt,\quad p=a+jb \tag{1.40}$$

另一方面，系统的动态特性也可由系统的频率响应函数 $H(f)$ 来描述，这里 $H(f)$ 定义为 $h(t)$ 的 Fourier 变换（再次注意到，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$）

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_0^{\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.41}$$

频率响应函数是传递函数的一种特例，即 $p=a+jb$ 中，令 $a=0,b=2\pi f$。对于物理上可实现和稳定的系统，频率响应函数代替传递函数，不会失去有用的信息。

对式(1.39)两边取 Fourier 变换，若 $X(f)$ 是 $x(t)$ 的 Fourier 变换，$Y(f)$ 是 $y(t)$ 的 Fourier 变换，则有重要的关系式

$$Y(f)=H(f)X(f) \tag{1.42}$$

由此关系式可看出，频率响应函数实际上就是系统的输出与输入信号的频域函数复数比，而传递函数是系统的输出与输入信号的 p 域函数复数比。

频率响应函数一般是复数，用模和相角表示较方便，即采用复数极坐标表示

$$H(f) = |H(f)| e^{-j\phi(f)} \tag{1.43}$$

其中，模 $|H(f)|$ 称为系统增益因子，相角 $\phi(f)$ 称为系统相位因子。有了这两个因子，系统的频率响应函数具有如下的物理意义：若系统的输入是频率为 f 的正弦波，则它产生的输出也是一个相同频率的正弦波。输出振幅与输入振幅之比等于系统增益因子，输出与输入的相位差等于系统相位因子。

当系统的输入与输出为随机信号时，情况就有所不同了。若系统的输入 $x(t)$ 是平稳随机信号的话，则系统的输出 $y(t)$ 也将是一个平稳随机信号。可证明两者的自功率谱密度 $G_x(f)$ 和 $G_y(f)$ 有如下重要的关系式

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) = H(f)H^*(f)G_x(f) \tag{1.44}$$

其中 $H^*(f)$ 是 $H(f)$ 的共轭复数。

而两者的互谱密度函数与输入的自谱密度有下列关系

$$G_{xy}(f) = H(f)G_x(f) \tag{1.45}$$

由式(1.44)和(1.45)得到

$$G_y(f) = H^*(f)G_{xy}(f) \tag{1.46}$$

以上的关系式，对于我们今后在模态参数识别中，识别系统的频率响应函数的幅频和相频信息，有很大的帮助。